

אינפי 2

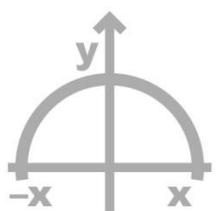


$$\begin{matrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{matrix}$$



$$\begin{matrix} + & - & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{matrix}$$

$$\{\sqrt{x}\}^2$$



תוכן העניינים

1.	1.	1. אינטגרלים מיידיים
4.	4.	2. אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"
6.	6.	3. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלוקת
10.	10.	4. אינטגרלים בשיטת הatzba
13.	13.	5. אינטגרלים של פונקציות רצינוליות
18.	18.	6. אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות
29.	29.	7. האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו
53.	53.	8. שימושי האינטגרל המסוים (שטח-אורך קשת)
75.	75.	9. שימושי האינטגרל המסוים (נפח-שטח מעטפת)
80.	80.	10. המשפט היסודי של החדו"א, משפט הערך הממוצע לאינטגרלים
88.	88.	11. אינטגרלים לא אמיתיים
99.	99.	12. טורים עם איברים קבועים
113.	113.	13. סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטוריות חזקות
122.	122.	14. טורי טילור - מקלורן
137.	137.	15. קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים למרחב
164.	164.	16. פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה
172.	172.	17. גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים
179.	179.	18. נגורות חלקיות דיפרנציאబליות
190.	190.	19. כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים
194.	194.	20. נגזרת מכוונת וגרדיאנט
199.	199.	21. פונקציות סטומות - שימושים גיאומטריים
213.	213.	22. נוסחת טילור לפונקציה של שני משתנים והדיפרנציאל השלים
216.	216.	23. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

24. קיצון של פונקציה רבת משתנים (רמה מתקדמת) - הריבועים הפחותים	218
25. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנו')	220
26. נושאים מתקדמים - הצעה פרמטרית של פונקציה	223
27. נושאים מתקדמים - הצעה פולרית של פונקציה	228

אינפי 2

פרק 1 - אינטגרלים מיידיים

תוכן העניינים

1 1. אינטגרלים מיידיים

אינטגרלים מיידיים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-12 (פתרונות על ידי הכלל : $(\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c)$)

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3)$$

$$\int x^4 dx \quad (2)$$

$$\int 4dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9)$$

$$\int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8)$$

$$\int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12)$$

$$\int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11)$$

$$\int (x^2 + 1)(x + 2) dx \quad (10)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 13-20 :

(פתרונות על ידי הכלל : $(\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c)$)

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15)$$

$$\int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14)$$

$$\int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17)$$

$$\int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 21-26 :

(פתרונות על ידי הכלל : $(\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c)$)

$$\int \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (23)$$

$$\int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26)$$

$$\int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 29-27 :

$$\left(\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c \right) \text{ (פתרונות על ידי הכלל : 29)}$$

$$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

$$(30) \text{ חשבו את האינטגרל : } \int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$$

$$\left(\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c \right) \text{ (פתרונות על ידי הכלל : 30)}$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 33-31 :

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x} + c \quad (3)$$

$$\frac{x^5}{5} + c \quad (2)$$

$$4x + c \quad (1)$$

$$\frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6)$$

$$-\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5)$$

$$\frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9)$$

$$-\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c \quad (8)$$

$$\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7)$$

$$\frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11)$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10)$$

$$-\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15)$$

$$\frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14)$$

$$\frac{(4x+11)^{11}}{44} + c \quad (13)$$

$$10\sqrt{2x+4} + c \quad (17)$$

$$\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16)$$

$$-\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18)$$

$$\ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{\ln|x|}{4} + c \quad (21)$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20)$$

$$x + \ln|x+2| + c \quad (25)$$

$$\frac{\ln|4x-1|}{4} + c \quad (24)$$

$$x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23)$$

$$\frac{e^{2x+2}}{2} + c \quad (28)$$

$$\frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c \quad (27)$$

$$4(x - 1.75\ln|x+2|) + c \quad (26)$$

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{\left(200\right)^x}{\ln(200)} + c \quad (30)$$

$$8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{\frac{-4x}{3}}}{4} + c \quad (29)$$

$$-\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c \quad (33)$$

$$\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (32)$$

$$\frac{1}{2}\arctan(2x) + c \quad (31)$$

אינפי 2

פרק 2 - אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים.....

אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת הצבה.

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3)$$

$$\int \cot x dx \quad (2)$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5)$$

$$\int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9)$$

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8)$$

$$\int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12) \quad \int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11) \quad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15)$$

$$\int \sin(x^2+1) x dx \quad (14)$$

$$\int \cos(10x^4+1) x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{(\tan x)}{\cos^2 x} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \quad (24)$$

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23)$$

$$\int x^2 \sqrt{x^3+4} dx \quad (22)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{3} \ln|x^3 + 1| + c \quad (3)$$

$$\ln|\sin x| + c \quad (2)$$

$$\ln|x^2 + 1| + c \quad (1)$$

$$e^x \ln|e^x + 1| + c \quad (6)$$

$$\ln|\ln|x|| + c \quad (5)$$

$$-\ln|\cos x| + c \quad (4)$$

$$-\frac{e^{-2x^2}}{4} + c \quad (9)$$

$$e^{\tan x} + c \quad (8)$$

$$e^{x^2} + c \quad (7)$$

$$\sin(\ln x) + c \quad (12)$$

$$\sin(\sin x) + c \quad (11)$$

$$\sin(2x^2 + 1) + c \quad (10)$$

$$-2 \cos(\sqrt{x}) + c \quad (15)$$

$$-\frac{1}{2} \cos(x^2 + 1) + c \quad (14)$$

$$\frac{1}{40} \sin(10x^4 + 1) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} (\tan x)^2 + c \quad (18)$$

$$\frac{1}{2} (\arctan x)^2 + c \quad (17)$$

$$\frac{1}{2} (\ln x)^2 + c \quad (16)$$

$$\frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c \quad (21)$$

$$\sqrt{2 \sin x} + c \quad (20)$$

$$2\sqrt{x^2 + 1} + c \quad (19)$$

$$\frac{2}{3} (\arctan x)^{\frac{3}{2}} + c \quad (24)$$

$$\frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} + c \quad (23)$$

$$\frac{2}{9} (x^3 + 4)^{\frac{3}{2}} + c \quad (22)$$

אינפי 2

פרק 3 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלוקת

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלוקת 6

אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלוקת

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-23 :

$$\int x \sin x dx \quad (3)$$

$$\int x^4 \ln x dx \quad (2)$$

$$\int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad (6)$$

$$\int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \quad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \arctan x dx \quad (9)$$

$$\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8)$$

$$\int \ln x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12)$$

$$\int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11)$$

$$\int \arcsin x dx \quad (10)$$

$$\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15)$$

$$\int x \arctan x dx \quad (14)$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13)$$

$$\int e^x \cos x dx \quad (18)$$

$$\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17)$$

$$\int \ln^2 x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21)$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20)$$

$$\int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (23)$$

$$\int x \tan^2 x dx \quad (22)$$

$$(24) \text{ מצאו נוסחת נסיגה עבור } \int x^n e^x dx \text{ באשר } n \text{ טבעי.}$$

$$(25) \text{ חשבו את } \int x^4 e^x dx.$$

$$(26) \text{ מצאו נוסחת נסיגה עבור } \int \cos^n x dx \text{ באשר } n \text{ טבעי.}$$

$$(27) \text{ חשבו את } \int \cos^4 x dx.$$

(28) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ כאשר n טבעי.

(29) חשבו את $\int \sin^4 x dx$.

(30) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ כאשר n טבעי.

(31) חשבו את $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$

(32) חשבו את האינטגרלים $\int e^{ax} \cos bx dx$, $\int e^{ax} \sin bx dx$.

תשובות סופיות

(1) $xe^x - e^x + c$

(2) $\frac{x^5}{5} \left(\ln x - \frac{1}{5} \right) + c$

(3) $x \cos x + \sin x + c$

(4) $\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c$

(5) $-\frac{x^2}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{4} \sin x + \frac{1}{16} \cos 4x \right) + c$

(6) $-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} xe^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c$

(7) $x \ln x - x + c$

(8) $-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c$

(9) $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c$

(10) $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$

(11) $\frac{1}{5} \left(\frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln|x-2| \right) \right) + c$

(12) $x \tan x + \ln |\cos x| + c$

(13) $-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c$

(14) $\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + c$

(15) $\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{3} \left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + c$

(16) $x (\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c$

(17) $-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c$

(18) $-e^x \cos x + \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c$

(19) $\frac{e^{2x} \left(-\cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x \right)}{5} + c$

(20) $\frac{x \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x}{2} + c$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (21)$$

$$x(\tan x - x) + \ln|\cos x| + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (23)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (24)$$

$$e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (25)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx \right\} \quad (26)$$

$$\frac{1}{4}(\cos^3 x \sin x + 3 \cdot 5(\cos x \sin x + x)) + c \quad (27)$$

$$\frac{1}{n}(-(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx) \quad (28)$$

$$\frac{1}{4}(-\sin^3 x \cos x + 3 \cdot 5(x - \sin x \cos x)) + c \quad (29)$$

$$\frac{1}{2n} \left(\frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} (2n-1) \right) \quad (30)$$

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right\} \right\} \right\} \quad (31)$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = e^{ax} \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2}, \quad \int e^{ax} \sin bx dx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \quad (32)$$

אינפי 2

פרק 4 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

- 10 1. אינטגרלים בשיטת ההצבה

אינטגרלים בשיטת ההצבה

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \qquad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \qquad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \qquad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \qquad \int 2x^3 \cos(x^2+1) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \qquad \int \ln^3 x dx \quad (14) \qquad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (21) \qquad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \qquad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \qquad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{\left(\sqrt{x^3+4}\right)^5}{5} - \frac{4}{3} \left(\sqrt{x^3+4}\right)^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$\arctan(e^x) + c \quad (4)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (5)$$

$$\arcsin(\ln x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \left(x^2 e^{x^2} - e^{x^2} \right) + c \quad (7)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} \left(\sqrt[3]{x}^2 - 2\sqrt[3]{x} + 2 \right) + c \quad (8)$$

$$\ln \left| \left(x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (9)$$

$$x^2 \sin(x^2+1) + \cos(x^2+1) + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{18} \left(\frac{(3x^2-1)^{16}}{16} + \frac{(3x^2-1)^{15}}{15} \right) + c \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \left(\ln x + \frac{1}{2} \sin(2 \ln x) \right) + c \quad (12)$$

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (13)$$

$$x \left(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6 \right) + c \quad (14)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x^4}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (15)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (16)$$

$$\frac{(\arctan x)^3}{3} + c \quad (17)$$

$$\ln|\ln(\ln x)| + c \quad (18)$$

$$x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{1-x^4} - \ln|1-x^4| \right) + c \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}} - 1}{\sqrt{1+e^{2x}} + 1} \right| + c \quad (21)$$

$$\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c \quad (22)$$

$$6 \left(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x} \right) + c \quad (23)$$

$$\frac{\left(\sqrt[3]{x^3 + 1} \right)^7}{7} - \frac{\left(\sqrt[3]{x^3 + 1} \right)^4}{4} + c \quad (24)$$

אינפי 2

פרק 5 - אינטגרלים של פונקציות רצינוליות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים של פונקציה רצינולית	13
2. חילוק פולינומיים ואינטגרלים של פונקציה רצינולית	15
3. אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רצינולית	16

אינטגרלים של פונקציה רצינלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x+5}{(x^2 - 2x + 1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2 + 5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4} \quad (3)$$

$$\int \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{x}{x^2 + 5x + 6} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{10x}{x^4 - 13x^2 + 36} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{6x^2 + 4x - 6}{x^3 - 7x - 6} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3 + x^2} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 4x + 4)} \quad (12)$$

$$\int \frac{9x + 36}{x^3 + 6x^2 + 9x} dx \quad (11)$$

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{2x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)(x + 2)} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{2x^2 + x - 1}{(x^2 + 1)(x - 3)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2 + 1)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2 + 4)^2} dx \quad (19)$$

תשובות סופיות

$$\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3(x-6)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5}|x+5| + c \quad (4)$$

$$3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c \quad (6)$$

$$\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + 3 \ln|x-3| + c \quad (7)$$

$$\ln|x+3| + \ln|x-3| - \ln|x+2| - \ln|x-2| + c \quad (8)$$

$$\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \ln|x+2| + c \quad (9)$$

$$6 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{5}{x} + c \quad (10)$$

$$4 \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{3}{x+3} + c \quad (11)$$

$$2 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + c \quad (12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \arctan \left(\frac{x+0.5}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \right) + c \quad (14)$$

$$\arctan x + 2 \ln|x-3| + c \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \ln|x+2| + c \quad (16)$$

$$\arctan x - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right) + c \quad (17)$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2(x^2 + 1)} + c \quad (18)$$

$$\frac{1}{16} \left(\arctan \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \left(\arctan \left(\frac{x}{2} \right) \right) \right) + c \quad (19)$$

חילוק פולינומיים ואינטגרלים של פונקציה רצינלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 2}{x-1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 8x}{x+4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{12x^3 - 11x^2 + 6x - 1}{4x-1} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x}{(x-1)^2} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x^4 - 4x^2 + x + 1}{x^2 - 4} dx \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$x^3 - x^2 + 2x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - x^2 + c \quad (2)$$

$$x^3 - x^2 + x + c \quad (3)$$

$$\frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x+2| + c \quad (5)$$

אינטגרלים שימושיים הצבה ופונקציה רצינלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x}} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} \quad (2)$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{1+e^x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$-1.5 \ln \left| 1 - \sqrt[3]{x^2} \right| + c \quad (1)$$

$$6 \left(\frac{\left(1 + \sqrt[6]{x} \right)^3}{3} - \frac{3\left(1 + \sqrt[6]{x} \right)}{2} + 3\left(1 + \sqrt[6]{x} \right) - \ln \left| 1 + \sqrt[6]{x} \right| \right) + c \quad (2)$$

$$4 \left(\frac{\left(1 + \sqrt[4]{x-1} \right)^2}{3} - \frac{3\left(1 + \sqrt[4]{x-1} \right)^2}{2} + 3\left(1 + \sqrt[4]{x-1} \right) - \ln \left| 1 + \sqrt[4]{x-1} \right| \right) + c \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{x} + \ln \left| \sqrt[3]{x} + 1 \right| - \frac{1}{2} \ln \left(\left(\sqrt[3]{x} - 0.5 \right)^2 + 0.75 \right) - \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{3}} \right) + c \quad (4)$$

$$-\ln \left| 1 + e^x \right| + x + c \quad (5)$$

$$2\sqrt{1+e^x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^x} - 1}{\sqrt{1+e^x} + 1} \right| + c \quad (6)$$

$$\ln \left| \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} \right| + c \quad (7)$$

נוסחאות

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

אינפי 2

פרק 6 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים טריגונומטריים - מבוא	(לא ספר)
2. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי זהויות	18
3. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבות פשוטות.....	20
4. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבה כללית.....	21
5. הצבות טריגונומטריות שມטרתן להיפטר משורשים.....	22
6. חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות.....	25

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי זהויות

זכרו כי :

$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$
$\int \tan x dx = -\ln \cos x + c$	$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax+b) + c$
$\int \cot x dx = \ln \sin x + c$	$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax+b) + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\cos^2 4x} \quad (2)$$

$$\int \left(\sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx \quad (1)$$

$$\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 10x} \quad (3)$$

$$\int (\sin x + \cos x)^2 dx \quad (6)$$

$$\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx \quad (5)$$

$$\int \tan^2 x dx \quad (8)$$

$$\int \sin x \cos x \cos 2x dx \quad (7)$$

$$\int \sin 7x \cos 5x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{dx}{(\sin x \cos x)^2} \quad (9)$$

$$\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx \quad (12)$$

$$\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx \quad (11)$$

$$\int \sin^2 4x dx \quad (14)$$

$$\int \cos^2 x dx \quad (13)$$

$$\int \sin^3 4x dx \quad (16)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (15)$$

$$\int \sin^4 4x dx \quad (18)$$

$$\int \cos^4 x dx \quad (17)$$

$$\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx \quad (21)$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad (24)$$

$$\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad (23)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \tan 4x + c \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \cos 2x - 12 \sin \frac{x}{3} + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (4)$$

$$-10 \cot 10x + c \quad (3)$$

$$x - \frac{1}{2} \cos 2x + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (5)$$

$$\tan x - x + c \quad (8)$$

$$-\frac{1}{16} \cos 4x + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{12} \cos 12x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + c \quad (10)$$

$$\tan x - \cot x + c \quad (9)$$

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{16} \sin 4x + c \quad (12)$$

$$\sin x + c \quad (11)$$

$$\frac{x}{2} - \frac{\sin 8x}{16} + c \quad (14)$$

$$\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c \quad (13)$$

$$-\frac{3}{16} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 12x + c \quad (16)$$

$$\frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{12} \sin 3x + c \quad (15)$$

$$\frac{3}{8}x - \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{128} \sin 16x + c \quad (18)$$

$$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad (17)$$

$$2 \sin x + c \quad (20)$$

$$-\cot x - x + c \quad (19)$$

$$-\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + c \quad (22)$$

$$\ln |\cos x| + c \quad (21)$$

$$3x + \frac{1}{2} \sin 2x - 2 \sin x + c \quad (23)$$

$$\frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{24} \sin 6x \right) + c \quad (24)$$

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבות פשוטות

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ (x = \arcsin t) \end{array} \right| = \int f(t) dt$$

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ (x = \arccos t) \end{array} \right| = \int f(t)(-dt)$$

זכור כי:

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

(2) $\int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx$

(1) $\int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx$

(4) $\int \sin^3 2x dx$

(3) $\int \cos^3 x dx$

(6) $\int \sin^5 x \cos^4 x dx$

(5) $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$

(8) $\int \tan^5 x dx$

(7) $\int \cos^5 x dx$

(10) $\int \frac{dx}{\sin x}$

(9) $\int \frac{1}{\cos x} dx$

(12) $\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx$

(11) $\int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx$

תשובות סופיות

(2) $\frac{-\cos^4 x}{4} - \frac{\cos^2 x}{2} + 2 \cos x + c$

(1) $\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^2 x}{2} + 2 \sin x + c$

(4) $-\frac{1}{2} \left(\cos 2x - \frac{\cos^3 2x}{3} \right) + c$

(3) $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$

(6) $-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{9} \cos^9 x + c$

(5) $\frac{1}{5} \sin 5x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + c$

(8) $\frac{1}{4 \cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \ln |\cos x| + c$

(7) $\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + c$

(10) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c$

(9) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + c$

(12) $-\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\cos x + 1}{\sqrt{2}} \right) + c$

(11) $-2e^{\cos x} (\cos x - 1) + c$

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \left| \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ (x = 2 \arctan t) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

זכור כי:

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (2)$$

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1} + c \quad (1)$$

$$\ln \left| 1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| + c \quad (2)$$

$$-x + 2 \left(\frac{2}{3\sqrt{\frac{1}{3}}} \arctan \left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{\frac{1}{3}}} \right) \right) + c \quad (3)$$

הצבות טריגונומטריות שמשתרתן להיפטר משורשים

$$\boxed{\begin{aligned} \int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = a \sin t \\ (t = \arcsin \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt) \\ \int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = a \tan t \\ (t = \arctan \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right) \\ \int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos \frac{a}{x}) \end{array} \right| = \int f(a \tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right) \end{aligned}}$$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}} \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx \quad (2)$$

$$\int \sqrt{4x^2-1} dx \quad (3)$$

הערה : כדי לפתרו את השאלה צריך לדעת "אינטגרלים של פונקציות רצינליות".

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}} \quad (4)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{x^2+2x-3} dx \quad (6)$$

$$\int \sqrt{-6x - x^2} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{(4+x^2)^2} \quad (8)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^{3/2}} \quad (9)$$

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{4} \cot\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1 - \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)} \right| + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \left[\ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} \right] + c \quad (3)$$

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right) + c \quad (4)$$

$$2 \left\{ \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2 \left(\arcsin\frac{x}{2} \right)\right) \right\} + c \quad (5)$$

$$\ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} + c \quad (6)$$

$$\frac{9}{2} \left\{ \arcsin \frac{x+3}{3} + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin \frac{x+3}{3}\right) \right\} + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{16} \left\{ \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arctan \frac{x}{2}\right) \right\} + c \quad (8)$$

$$\frac{1}{4} \sin\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) + c \quad (9)$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{1+x^2} + x \right| + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+1} \right\} + c \quad (10)$$

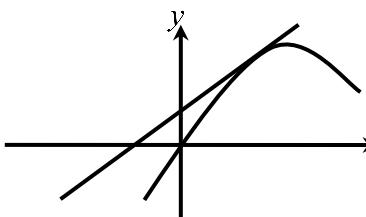
$$\ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + c \quad (11)$$

חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x) = x + 2 \sin x$.

בתוחום שבין ראשית הצירים لنקודת המקסימום הראשונה
מיינינה העבירו לפונקציה משיק ששיופעו 1.



א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,
המשיק וציר ה- x , בריבוע הראשון והשני.

2) באIOR שלහן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{2}$

בתוחום $\pi \leq x \leq 1.75\pi$.



נעביר משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה,
ונעליה אנך לציר ה- x מנקודת החיתוך הראשונה
של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנตอน,

המסומנת ב-C, כך שנוצר המלבן ABCO.
השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- S_1 (מקווקו).
השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- y יסומן ב- S_2 .

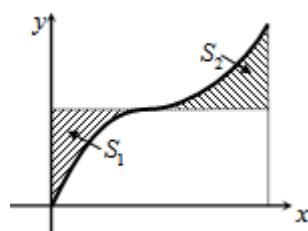
א. מצאו את משוואת הצלע AB של המלבן.

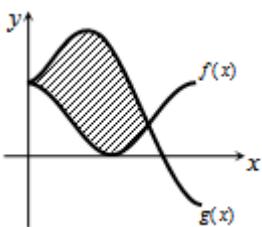
ב. חשבו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.

3) באIOR שלහן נתונה הפונקציה $y = \sin x + x$, בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

א. האם יש לפונקציה נקודות פנימיות בתחום הנตอน? הוכיחו זאת.

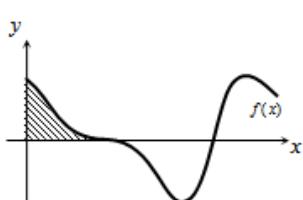
ב. נוריד אנך מגראף הפונקציה לציר ה- x בנקודת שבה $x = 2\pi$,
ונעביר ישר המקביל לציר ה- x מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.
הראו כי השטחים המסומנים בشرطוט, S_1 ו- S_2 , שוויים.





4) באIOR שלහלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \cos^2 x$ ו- $g(x) = \sin^2 x + \cos x$, בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

- מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.
- חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$



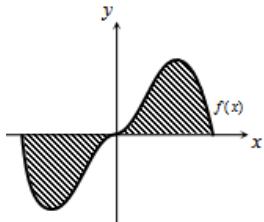
5) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = -\cos 2x - \sin x$.

- מצאו את שיעורי ה- x של הנקודות המקיים $f'(x) = 0$, בתחום $0 < x < 2\pi$.

ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x) = 0$, אשר אינה קייזון, נמצאת על ציר ה- x .

- מצאו את הפונקציה $f(x)$.

6) באIOR שלහלן מתואר גраф הפונקציה בתחום הנתון. חשבו את השטח הכלוא בין גраф הפונקציה והצירים.



6) נתונה הפונקציה $y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$.

- הוכיחו כי נגזרת הפונקציה היא

$f'(x) = x^2 \sin x$, בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

- הראו כי גраф הפונקציה עובר בראשית הצירים.

7) נתונה הפונקציה $f(x) = a \cos x + b \sin x$, כאשר a, b פרמטרים.

הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$ והיא חיובית בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2} - 2$.

מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .

תשובות סופיות

ב. π ייח"ש. א. $y = x + 2$ (1)

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{3\pi - 2} = 1.538 \quad \text{ב. } y = 1 \quad \text{א. } (1)$$

2) א. אין נקודת קיצון, הנקודה (π, π) היא נקודת פיתול.

$$S = 0.5\pi^2 - 2 = 2.934 \quad \text{ב. } S = 1.5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.299 \quad \text{ב. } (0,1), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{4}\right) \quad \text{א. } (3)$$

$$\text{ג. } f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + \cos x \quad \text{ב. } x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \quad \text{א. } (4)$$

. $S = 2(\pi^2 - 4) \approx 11.74$ ב. שאלת הוכחה. א. שאלת הוכחה. (5)

$$b = -2, a = 2 \quad (6)$$

נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(a + \beta) + \sin(a - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(a - \beta) - \cos(a + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(a + \beta) + \cos(a - \beta)) \end{cases}$$

אינפי 2

פרק 7 - האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו

תוכן העניינים

1. האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א	29
2. מונוטוניות האינטגרל, אי שוווניות אינטגרליים	35
3. האינטגרל המסוים לפי ההגדלה, אינטגרביליות	38
4. משפטי האינטגרביליות	41
5. אינטגרביליות לפי דארבו	42
6. אינטגרביליות לפי דארבו - תרגול נוסף באנגלית	44

הaintgral המסויים, הנוסחה היסודית של החדו"א

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-9:

$$\int_1^4 (x^2 - 4x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 xe^{-x} dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx \quad (5)$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 10x dx \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \text{ כאשר } \int_0^4 f(x) dx \quad (7)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4 + |x-1|} dx \quad (8)$$

$$\int_0^2 \max\{x, x^2\} dx \quad (9)$$

10) הוכיחו כי :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx . \text{ א.}$$

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx . \text{ ב.}$$

11) הוכיחו שלכל פונקציה רציפה f :

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx . \text{ א.}$$

$$\int_0^\pi x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x)dx . \text{ ב.}$$

12) תהיו $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2$$

13) ללא חישוב האינטגרלים, חשבו את הערך של $\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x}} dx . \text{ חשבו :}$$

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx . \text{ חשבו :}$$

16) נתונה פונקציה רציפה f . הוכיחו :

$$f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx . \text{ א. אם } f \text{ זוגית, אז}$$

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0 . \text{ ב. אם } f \text{ אי-זוגית, אז}$$

чисבו את האינטגרלים בשאלות 17-18 :

$$\int_{-1}^1 (x^3 + x^5) \cos x dx \quad (17)$$

$$\int_{-4}^4 \frac{\sin x + 1}{x^2 + 1} dx \quad (18)$$

19) נתון כי $f(x)$ פונקציה רציפה ואי-זוגית לכל x , ונתון כי $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$.

$$\cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right) dx \quad \text{чисבו את האינטגרל}$$

20) חשבו את ערך האינטגרלים הבאים :

$$\text{א. } \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx$$

$$\text{ב. } \int_0^{\pi/2} \frac{f(\cos x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx$$

$$\text{ג. } (n \in \mathbb{N}) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \tan^n x} dx$$

21) (ازהרה לגבי שיטת הצבה)

א. חשבו את האינטגרל $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$, בעזרת הצבה $t = \frac{1}{x}$

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ יישירות.

ג. בסעיפים א' ו-ב' קיבלנו תשובות שונות. הסבירו את הסתירה.

$$\cdot \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx \quad (22)$$

23) ענו על הסעיפים הבאים :

א. בעזרת הצבה $x = \tan t$ חשבו את האינטגרל $\int \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$

ב. חשבו את ערך האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$

24) חשבו את ערך האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\cos^2 x} dx$

25) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$.

נניח כי הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=a$ יוצר זווית $\frac{\pi}{3}$ עם ה軸.

החיבוי של ציר x והישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=b$ יוצר זווית $\frac{\pi}{4}$

עם ה軸. חשבו את ערך החיבוי של ציר x .

$$\int_{e^a}^{e^b} \frac{f''(\ln x)}{x} dx$$

26) הוכחו:

אם f פונקציה רציפה ומוחזרת על כל הישר ואם T המחזור של f

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

27) הוכחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם f ו- g פונקציות רציפות ב- $[a,b]$, ואם $\int_a^b f(t) dt = 0$ וגם

$$\int_a^b f(t) g(t) dt = 0 \text{ אז } \int_a^b g(t) dt = 0$$

ב. אם f זוגית ואינטגרבילית בכל קטע,

$$\text{אז הפונקציה } g(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ אי-זוגית.}$$

תשובות סופיות

$$-6 \quad \text{(1)}$$

$$\ln\left(\frac{15}{8}\right) \quad \text{(2)}$$

$$-2e^{-1} + 1 \quad \text{(3)}$$

$$\frac{1}{5} \quad \text{(4)}$$

$$\arctan 6 - \arctan 3 \quad \text{(5)}$$

$$\frac{\pi}{2} \quad \text{(6)}$$

$$\frac{17}{12} \quad \text{(7)}$$

$$\frac{2}{3}(-16 + 6^{1.5} + 7^{1.5}) \quad \text{(8)}$$

$$\frac{17}{6} \quad \text{(9)}$$

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

$$x = e^2 \quad \text{(12)}$$

$$0 \quad \text{(13)}$$

$$\frac{\pi}{4} \quad \text{(14)}$$

$$\frac{\pi^2}{4} \quad \text{(15)}$$

(16) שאלת הוכחה.

$$0 \quad \text{(17)}$$

$$2\arctan 4 \quad \text{(18)}$$

$$0 \quad \text{(19)}$$

$$\frac{\pi}{4} \text{ א, ב, ג.} \quad \text{(20)}$$

$$\text{ג. ראו בסרטון.} \quad \text{ב. } \frac{\pi}{2} \quad \text{א. 0} \quad \text{(21)}$$

(22) שאלת הוכחה.

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} \text{ ב.} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + c \text{ א.} \quad \text{(23)}$$

$$\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}} \quad \text{(24)}$$

$$1 - \sqrt{3} \quad \text{(25)}$$

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים

שאלות

1) תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית, ונניח כי $M \geq f(x) \leq m$ לכל x בקטע $[a,b]$.

$$\text{הוכיחו כי } m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

הוכיחו את אי-השוויונים בשאלות 2-10:

$$\frac{2}{41} \leq \int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4} \leq 4 \quad (2)$$

$$6 \leq \int_{-4}^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq 6\sqrt{17} \quad (3)$$

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}e^{-10} \leq \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{x+10} dx \leq 1 \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}} \leq \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}} \quad (6)$$

$$\frac{\pi}{14} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+4\sin^2 x} \leq \frac{\pi}{6} \quad (7)$$

$$\frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7} \quad (8)$$

$$-\frac{1}{2} \leq \int_0^1 x \cdot \sin\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) dx \leq \frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right) dx \leq \frac{\pi^4}{6} \quad (10)$$

(11) תהי $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית. בהסתמך על המשפט, שטוען כי גם $|f|$ אינטגרבילית בקטע,

$$\text{הוכיחו כי } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

(12) תהי $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיים $\int_0^x f(t) dt \leq f(x)$ לכל $x \in [0,1]$. הוכיחו כי $f(0) = 0$.

(13) תהי $f : [0,a] \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש- $f''(x) > 0$ לכל $x \in [0,a]$. הוכיחו כי $\int_0^a f(x) dx > af\left(\frac{a}{2}\right)$. תנו משמעות גיאומטרית לתוצאה שהתקבלה.

(14) תהי g פונקציה רציפה ב- $[a,b]$, המקיימת $0 = g(a) = g(b)$. הוכיחו כי לכל x בקטע (a,b) , מתקיים $g(x) = 0$.

(15) תהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b f(x) dx > 1$. הוכיחו שקיימים $x_0 \in [a,b]$, עבورو $f(x_0) > \frac{1}{b-a}$.

(16) יהי n מספר טבעי, ותהי f פונקציה מונוטונית עולה ואינטגרבילית בקטע $[1,n]$. הוכיחו כי $f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(2) + f(3) + \dots + f(n)$.

(17) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k$

(18) הוכיחו שאם הפונקציה f רציפה בקטע $[a,b]$, גזירה בקטע (a,b)

$$\int_a^b f(x)dx \leq \frac{M(b-a)^2}{2} \text{ אז } f(a)=0 \text{ וכן } f'(x) \leq M \text{ וגם}$$

(19) יהיו $f, g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות.

נניח כי f עולה ו- g אי-שלילית.

הוכיחו שקיים $c \in [a,b]$ כך שה-

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

הaintegral המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-7 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n}}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right\} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{n^{3/2}} \right\} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(n+n)^2} \right] \quad (7)$$

$$\text{חסבו : } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \right) \quad (8)$$

* תרגיל זה רלוונטי רק למי שמלמד אינטגרלים לא-אמיתיים.

חשבו את האינטגרלים בשאלות 9-12 על פי ההגדרה (של רימן) :

$$1+2+3+\dots+n = 0.5n(n+1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n}{2}\alpha \sin \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

תוכלו להיעזר בזיהויות הבאות :

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \quad (12)$$

$$\int_0^1 x^3 dx \quad (11)$$

$$\int_0^1 x^2 dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 x dx \quad (9)$$

13) חשבו לפי ההגדרה של רימן את $\int_1^4 x^2 dx$

14) חשבו לפי ההגדרה של רימן את $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$

רמז : השתמשו בחלוקת הבאה של הקטע . $P = \left\{ 1 = 2^{\frac{0}{n}}, 2^{\frac{1}{n}}, 2^{\frac{2}{n}}, 2^{\frac{3}{n}}, \dots, 2^{\frac{n}{n}} = 2 \right\}$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{5} \quad \text{(1)}$$

$$1 - \cos 1 \quad \text{(2)}$$

$$\ln 2 \quad \text{(3)}$$

$$\frac{\pi}{4} \quad \text{(4)}$$

$$\ln(1 + \sqrt{2}) \quad \text{(5)}$$

$$\frac{2^{1.5}}{1.5} - \frac{2}{3} \quad \text{(6)}$$

$$\ln 2 \quad \text{(7)}$$

$$-1 \quad \text{(8)}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{(9)}$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{(10)}$$

$$\frac{1}{4} \quad \text{(11)}$$

$$2 \quad \text{(12)}$$

$$21 \quad \text{(13)}$$

$$0.5 \quad \text{(14)}$$

משפט האינטגרביליות

שאלות

1) בדקו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא אינטגרבילית בקטע $[a,b]$:

$$[a,b] = [0,2] \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} . \quad \text{א.}$$

$$[a,b] = [-4,14] \quad f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} . \quad \text{ב.}$$

$$[a,b] = [0,9] \quad f(x) = \begin{cases} 4x & x \neq 1 \\ -41 & x = 1 \end{cases} . \quad \text{ג.}$$

2) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה אינה אינטגרבילית בשום קטע $[a,b]$.
- ב. מצאו דוגמה לפונקציה חסומה בקטע מסויים שאינה אינטגרבילית בו.
- ג. מצאו דוגמה לפונקציה מונוטונית למקוטען בקטע $[-1,1]$,
שאיינה אינטגרבילית בקטע.

3) לגבי כל אחת מהטענות, קבעו אם היא נכון או לא נכון. נמקו.

- א. קיימת פונקציה אינטגרבילית f , בקטע $[a,b]$,
שאין לה פונקציה קדומה בקטע זה.
- ב. קיימת פונקציה f , החסומה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b) ,
שאיינה אינטגרבילית ב- $[a,b]$.

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q}, x \neq \frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{4} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \\ 2 & x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{4) נתונה הפונקציה}$$

האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע $[0,1]$?

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

אינטגרביליות לפי דארבו

שאלות

1) נתונה $\mathbb{R} \rightarrow [0,1] : f$, המוגדרת על ידי $x = f(x)$.

- א. מצאו את האינטגרל העליון והאינטגרל התחתון של הפונקציה בקטע.
- ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו
ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

2) נתונה $\mathbb{R} \rightarrow [0,2] : f$ המוגדרת על ידי $x^2 = f(x)$.

- א. מצאו את האינטגרל העליון והתחתון של הפונקציה בקטע.
- ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו בקטע
ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

$$3) \text{ נתונה הפונקציה הבאה} \\ f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 0.5 \\ 2 & x = 0.5 \\ 1 & 0.5 < x \leq 1 \end{cases}$$

הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו.

4) נתונה הפונקציה $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ בקטע $[0,1]$.

- א. בדקו, לפי ההגדרה של דארבו, האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע.
- ב. תנו דוגמה לפונקציה f , כך ש- $|f|$ ו- f^2 אינטגרביליות,
אך f לא אינטגרבילית.

5) תהי $\mathbb{R} \rightarrow [a,b] : f$ פונקציה חסומה.

נניח שקייםת חלוקה P של הקטע $[a,b]$, כך ש- $L(P,f) = U(P,f)$.

הוכיחו ש- f פונקציה קבועה.

6) תהי $\mathbb{R} \rightarrow [a,b] : f$ פונקציה חסומה.

נניח שקייםת חלוקה P_n של הקטע $[a,b]$, כך ש- $U(P_n,f) - L(P_n,f) \rightarrow 0$.

א. הוכיחו ש- f אינטגרבילית בקטע.

$$\text{ב. הוכיחו כי } \lim_{n \rightarrow \infty} U(P_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(P_n, f) = \int_a^b f(x) dx$$

7) בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית בעזרת קритריון רימן. בנוסף, חשבו את האינטגרל המסוים של הפונקציה בקטע.

א. $f(x) = x$, בקטע $[0,1]$.

ב. $f(x) = x^2$, בקטע $[0,2]$.

8) הוכיחו שהפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ אינטגרבילית בקטע $[1,2]$ בעזרת קритריון רימן.

תשובות סופיות

$$\int_0^1 f dx = \frac{1}{2} . \quad \text{ב.} \quad \overline{\int_0^1} f = \underline{\int_0^1} f = \frac{1}{2} . \quad \text{1) א.}$$

$$\int_0^2 f dx = \frac{8}{3} . \quad \text{ב.} \quad \overline{\int_0^2} f = \underline{\int_0^2} f = \frac{8}{3} . \quad \text{2) א.}$$

3) שאלת הוכחה.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} . \quad \text{ב.} \quad \text{4) א. שאלת הוכחה.}$$

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

אינטגרביליות לפי דארבו – תרגול נוספת באנגלית

שאלות

1) תהי $\mathbb{R} \rightarrow [0,2]$: f מוגדרת על ידי $x^2 = f(x)$.
מצאו סכום דארבו עליון ותחתון של הפונקציה המתאימים לחוקת הקטע $-n$ תת-קטועים בעלי אורך שווה, כאשר $n = 6, 8, 10, 20$.

2) ענו על הסעיפים הבאים :

- הגידרו את המושג עידון של חלוקה.
- הוכחו את המשפט הבא :
תהי $\mathbb{R} \rightarrow [a,b]$: f פונקציה חסומה ויהיו P ו- Q שתי חלוקות של הקטע, כך ש- Q עידון של P , אז $L(Q,f) \leq U(Q,P) \leq U(Q,f)$.
- הוכחו את המסקנה הבאה מהמשפט :

$$\cdot \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^{\bar{b}} f(x)dx, \text{ או } f \text{ פונקציה חסומה, אז}$$

3) ענו על הסעיפים הבאים :

- הוכחו את קרייטריון רימן לאינטגרביליות.
כלומר, הוכחו את המשפט הבא :
פונקציה חסומה f היא אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אם ורק אם לכל $0 < \varepsilon < U(P,f) - L(P,f)$ קיימת חלוקה P של הקטע $[a,b]$, כך ש- $\max_{x \in P} f(x) - \min_{x \in P} f(x) < \varepsilon$.
- הוכחו את המסקנה מהמשפט לעיל :
תהי f פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$, ונניח כי (P_n) היא סדרה של חלוקות של הקטע $[a,b]$, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} U(P_n, f) - L(P_n, f) = 0$.
הוכחו ש- f אינטגרבילית.

$$\cdot f(x) = \begin{cases} x & x = 1/n \\ 0 & x \neq 1/n \end{cases} \text{ מוגדרת על ידי}$$

הוכחו כי f אינטגרבילית ומצאו את $\int_0^1 f(x)dx$.

4) הוכחו את המשפטים הבאים :

- פונקציה רציפה בקטע סגור היא אינטגרבילית בקטע.
- פונקציה מונוטונית בקטע סגור היא אינטגרבילית בקטע.

5) סדרת פונקציות $f_n(x) : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת על ידי: $f_n(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{1+x} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$

$$\text{הוכחו כי } 0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0$$

6) תהי פונקציה $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, כך ש- x רציונלי, $f(x) = 0$ לכל x אי-רציונלי.

העריכו את האינטגרל העליון והתחתון של f , והראו כי f אינה אינטגרבילית.

7) תהי $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$, מוגדרת באופן הבא:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{כאשר } x = \frac{p}{q}, \text{ כאשר } p, q \in \mathbb{N}, \text{ ול- } p, q \text{ אינ גורמים משותפים} \\ 0 & \text{אם } x \text{ אי-רציונלי או } x = 1 \end{cases}$$

א. תהי A_N מוגדרת באופן הבא, לכל $N \in \mathbb{N}$: $A_N = \left\{ x \in (0,1) \mid x = \frac{p}{q} \text{ ו- } q \leq N, p, q \in \mathbb{N}, \text{ ול- } p, q \text{ אינ גורמים משותפים.}\right\}$
הראו שהקבוצה A_N סופית.

ב. ל- $N \in \mathbb{N}$ ו- $\epsilon > 0$ נתונים, הראו כי קיימים קטעים $[x_1, x_2], [x_3, x_4], \dots, [x_{2m-1}, x_{2m}]$

$$, 0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots < x_{2m-1} < x_{2m} < 1 , A_N \subseteq (x_1, x_2) \cup (x_3, x_4) \cup \dots \cup (x_{2m-1}, x_{2m})$$

$$. |x_1 - x_2| + |x_3 - x_4| + \dots + |x_{2m-1} - x_{2m}| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

ג. הראו ש- f אינטגרבילית.

ד. מצאו שתי פונקציות אינטגרביליות, g ו- h ב- $[0,1]$, כך שההרכבה $h \circ g$ אינה אינטגרבילית.

8) תהי $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית וכן $[c,d] \subseteq [a,b]$.
הראו ש- f אינטגרבילית ב- $[c,d]$.

9) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי f חסומה ב- $[c,d]$, ונתנו :

$$M = \sup\{f(x) | x \in [c,d]\}, M' = \sup\{|f(x)| | x \in [c,d]\}$$

$$m = \inf\{f(x) | x \in [c,d]\}, m' = \inf\{|f(x)| | x \in [c,d]\}$$

הוכחו כי $m - m' \leq M - M'$.

ב. תהי $\mathbb{R} \rightarrow [a,b] : f$ אינטגרבילית.

הוכחו כי $|f|^2$ אינטגרבילית.

10) תהיינה f ו- g שתי פונקציות אינטגרביליות ב- $[a,b]$.

א. הוכחו כי אם $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ לכל $x \in [a,b]$ אז $f(x) \leq g(x)$ לכל

ב. הוכחו כי $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

ג. הוכחו כי אם $m \leq f(x) \leq M$ לכל $x \in [a,b]$ אז $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

$$\frac{\sqrt{3}}{8} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{6}$$

11) תהי $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ (כלומר, $f(x) \geq 0$).

א. הוכחו כי אם f רציפה וכן $\int_a^b f(x) dx = 0$, אז f לכל

ב. הביאו דוגמה לפונקציה f אינטגרבילית ב- $[a,b]$, כאשר $\int_a^b f(x) dx = 0$, כאשר

אבל קיים $x_0 \in [a,b]$, עבורו $0 < f(x_0) < \epsilon$.

הערה : f לא תהיה רציפה.

12) תהי $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שלכל $c \in (0,1)$, הפונקציה f אינטגרבילית ב- $[c,1]$.

א. הוכחו כי f אינטגרבילית ב- $[0,1]$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ \sin \frac{1}{x} & x \in (0,1] \end{cases}$$

אינטגרבילית ב- $[0,1]$.

13) תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חסומה.
 נניח שכאשר המכפלה fg אינטגרבילית ב- $[a, b]$, עבור פונקציה אינטגרבילית
 כלשהי g , מתקיים $\int_a^b (fg)(x) dx = 0$.
 הוכיחו כי 0 (כלומר, $f(x) = 0$ לכל $x \in [a, b]$)

14) ענו על הסעיפים הבאים:
 א. יהיו $x, y \geq 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x^n + y^n)^{\frac{1}{n}} = \max \{x, y\}$$

ב. תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ רציפה.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b (f(x))^n dx \right) = \sup \{f(x) | x \in [a, b]\}$$

15) [אי-שוויון קושי-שווורץ]

א. יהיו $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

רמז: $t \in \mathbb{R}$ לכל $\sum_{i=1}^n (tx_i + y_i)^2 \geq 0$

ב. תהיינה f, g שתי פונקציות אינטגרביליות ב- $[a, b]$.

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b (f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (g(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

רמז: $t \in \mathbb{R}$ לכל $\int_a^b [tf(x) + g(x)]^2 dx \geq 0$

16) תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.

נשנה את הערכים של f במספר סופי של נקודות.
 הוכיחו שהפונקציה שמתකבלת אינטגרבילית.

17) סעיף א'

$$1. \text{ הוכיחו כי } b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a + \dots + b^{n-2} + a^{n-1})$$

כאשר $a, b \in \mathbb{R}$ ו $n \in \mathbb{Z}^+$.

$$2. \text{ הוכיחו כי } k, n \in \mathbb{Z}^+, k^n < \frac{(k+1)^{n+1} - k^{n+1}}{n+1} < (k+1)^n.$$

$$3. \text{ הוכיחו כי } \sum_{k=1}^{m-1} k^n < \frac{m^{n+1}}{n+1} < \sum_{k=1}^m k^n$$

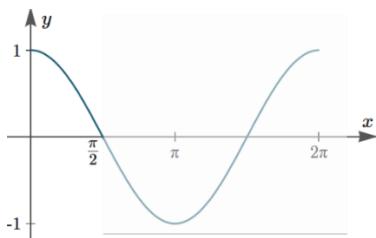
$$\text{כלומר, } 1^n + 2^n + \dots + (m-1)^n < \frac{m^{n+1}}{n+1} < 1^n + 2^n + \dots + (m-1)^n + m^n,$$

סעיף ב'

תהי $f(x) = x^n$ מוגדרת בתחום $[0, 1]$, כאשר $n \in \mathbb{N}$.

בעזרת סכומי רימן, הוכיחו כי f אינטגרבילית ב- $[0, 1]$, וחשבו $\int_0^1 f(x) dx$.

רמז: חלקו את הקטע $[0, 1]$ ל- m קטעים שווים והיעזרו בסעיף א' להערכת הסכומים העליונים והתחתונים.



$$18) \text{ תהי } f(x) = \cos x \text{ מוגדרת ב- } \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ כאשר } n \in \mathbb{N}.$$

השתמשו בסכומי רימן והוכיחו ש- f אינטגרבילית

$$\cdot \int_0^{\pi/2} f(x) dx, \text{ וחשבו את } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{רמז 1: חלקו את } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ ל- } n \text{ קטעים שווים, והניחו כי } n \rightarrow \infty.$$

רמז 2: השתמשו בזהות הטריגונומטרית הבאה, כאשר $\theta \in \mathbb{R}$ ו- $k \in \mathbb{Z}^+$:

$$\sin \frac{\theta}{2} \cos k\theta = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{(2k+1)\theta}{2} - \sin \frac{(2k-1)\theta}{2} \right]$$

$$\cdot \sin \frac{\theta}{2} \sum_{k=1}^n \cos k\theta = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{(2n+1)\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

$$19) \text{ חשבו את } \int_1^2 f(x) dx, \text{ בעזרת החלוקה}$$

כאשר $x_i = 2^{\frac{i}{n}}$ ($0 \leq i \leq n$), ווגם:

$$P_4 = \left\{ 1, 2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{2}{4}}, 2^{\frac{3}{4}}, 2 \right\} \quad f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{א.}$$

20) תהינה f, g שתי פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a, b]$. הוכיחו:

- א. אם $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ לכל $x \in [a, b]$, אז $f(x) \leq g(x)$
- ב. אם $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ לכל $x \in [a, b]$, אז $m \leq f(x) \leq M$

21) נניח כי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית אי-שלילית.

הוכיחו כי \sqrt{f} אף היא אינטגרבילית ב- $[a, b]$.

22) נתונה הפונקציה $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. הוכיחו או הפריכו:

- א. אם f אינטגרבילית, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס,

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

- ב. אם f רציפה, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס, אז $0 < \int_a^b f(x)dx > 0$

ג. אם f אינטגרבילית, אז כך גם f^2 .

ד. אם $|f|$ אינטגרבילית, אז כך גם f .

23) חשבו את $\lfloor x \rfloor = \max \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$, כאשר $\int_{0.25}^{4.3} \lfloor x \rfloor dx$

(פונקציית הערך השלים).

24) הוכיחו כי אם f אינטגרבילית ב- $[a, b]$ ו- $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

רמז: הניחו תחילת כי $\alpha \geq 0$, והיעזר בפונקציה $-f$, ל- $\alpha < 0$.

25) הוכיחו כי אם f, g אינטגרביליות ב- $[a, b]$, אז כך גם $f + g$

$$\int_a^b (f + g)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

רמז: הוכיחו כי $\overline{\underline{(f+g)}} \leq \overline{\underline{f}} + \overline{\underline{g}}$

26) נניח כי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית וכן קיימים $c > 0, d < c$ כך ש-

לכל $x \in [a, b]$ $\frac{1}{f(x)}$ אינטגרבילית ואניינה אפס ; חסומה

הוכיחו כי גם $\frac{1}{f(x)}$ אינטגרבילית בקטע $[a, b]$.

27) נתיח כי f, g אינטגרביליות ב- $[a,b]$.

א. הוכיחו כי גם $f \cdot g$ אינטגרבילית ב- $[a,b]$.

ב. הוכיחו כי אם $\int_a^b |g(x)| dx < \infty$ אז גם $\frac{f}{g}$ אינטגרבילית ב- $[a,b]$.

28) הנתיח כי $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ וכן $a < c < b$, והוכיח כי :

א. אם f אינטגרבילית ב- $[a,b]$, אז היא אינטגרבילית גם ב- $[a,c]$ ו- $[c,b]$.

ב. אם f אינטגרבילית ב- $[a,c]$ ו- $[c,b]$, אז היא אינטגרבילית גם ב- $[a,b]$.

ג. באיזה מהמקרים, בעקבות א' ו-ב', מתקיים השווון :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

29) נתיח כי f, g אינטגרביליות ב- $[a,b]$.

נגידיר $\psi = \min\{f, g\}$ וכן $\varphi = \max\{f, g\}$.

הוכיחו כי גם ψ, φ אינטגרביליות ב- $[a,b]$.

$$\text{רמז : } ? = \min\{a, b\}, \max\{a, b\} = \frac{1}{2}[a+b+|a-b|]$$

30) תהי $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

בהתנחת החלוקה $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ של $[a,b]$ וכן $\varepsilon > 0$

נגידיר שתי תת-קבוצות, $A_\varepsilon(P)$ ו- $B_\varepsilon(P)$, באופן הבא :

$M_i - m_i \geq \varepsilon$ אם $i \in A_\varepsilon(P)$ ו- $M_i - m_i < \varepsilon$ אם $i \in B_\varepsilon(P)$

$$s_\varepsilon(P) = \sum_{i \in B_\varepsilon(P)} \Delta x_i$$

הוכיחו כי פונקציה חסומה f אינטגרבילית ב- $[a,b]$ אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ ולכל $\delta > 0$ קיים $\zeta < \delta$ כך שכל P כנילז $s_\varepsilon(P) < \zeta$.

31) נתיח כי $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה ותהי $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$.

א. האם תמיד נוכל לבחור תגיות $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ ל- P ?

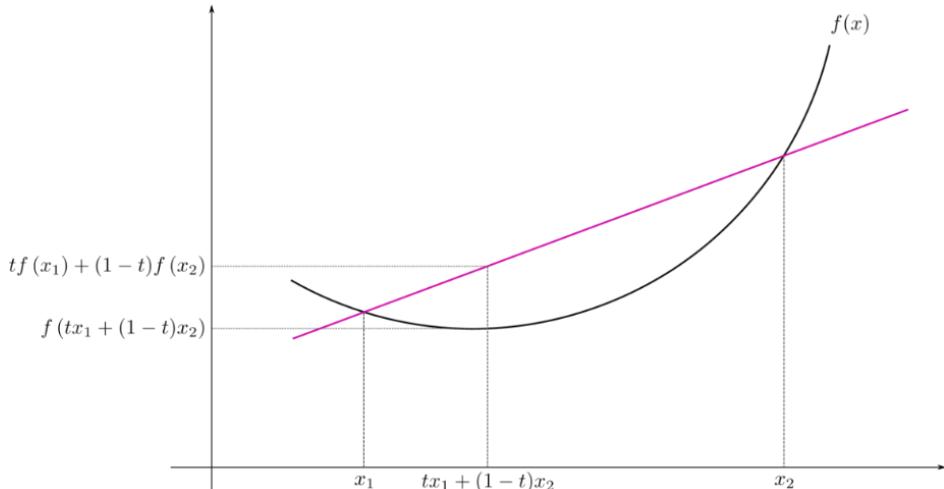
$$\text{כך ש- } S(f; P, C) = L(f, P) ? \text{ נמקו.}$$

הערה : ב"תגיות" הכוונה ש- $x_{i-1} < c_i < x_i$.

ב. האם התשובה תשתנה אם יניתן גם כי f רציפה?

32) זכרו כי פונקציה f על קטע I תיקרא קמורה, אם לכל $a, b \in I$, ולכל $t \in [0,1]$

$$\cdot f(t \cdot a + (1-t) \cdot b) \leq t \cdot f(a) + (1-t) \cdot f(b)$$



א. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ קמורה.

הוכיחו כי לכל $t_1, \dots, t_n \in [0,1]$ המקיימים $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, מתקיים אי-השוויון

$$\cdot f\left(\sum_{i=1}^n t_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(a_i)$$

ב. (אי-שוויון ינגש)

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ קמורה ורציפה, ותהי $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה.

$$\cdot f\left(\int_0^1 g(x) dx\right) \leq \int_0^1 f(g(x)) dx$$

33) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ותהי $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

א. הוכיחו כי f אי-זוגית אם ורק אם F זוגית.

ב. הוכיחו כי f זוגית אם ורק אם F אי-זוגית.

34) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ותהי $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

א. הוכיחו כי אם F מחזורית, אז גם f מחזורית.

ב. מצאו דוגמה שבה f מחזורית אבל F לא-מחזורית.

35) תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית.

$$\cdot \int_a^c f(x) dx = \int_c^b f(x) dx, \text{ כך ש-} \forall c \in [a,b]$$

36) תהי A קבוצת כל הפונקציות $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: f , שהן אינטגרביליות בכל $[a, b]$,

$$\boxed{\int_0^x f(t)dt = f(x) - 1 : x \in \mathbb{R}}$$

א. מצאו דוגמה לפונקציה ב- A .

ב. הוכיחו כי אם $f \in A$, אז f גזירה ב- \mathbb{R} .

(רמז: תחילת הראו ש- f רציפה).

ג. מצאו את כל הפונקציות f ב- A .

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

אינפי 2

פרק 8 - שימושי האינטגרל המסוים (שטח-אורך קשת)

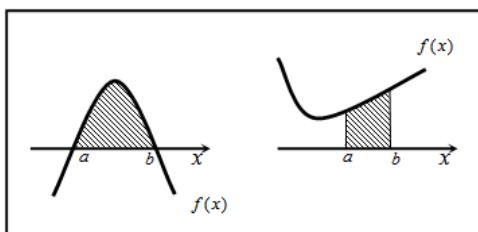
תוכן העניינים

53	1. חישוב שטחים
73	2. אורך קשת
74	3. חישוב שטחים ביחס לציר ה- y

чисוב שטחים

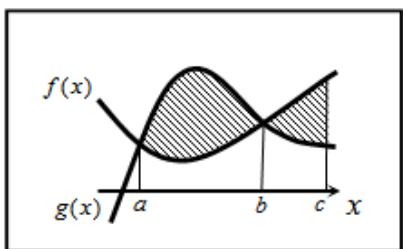
чисוב שטחים באמצעות אינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- x :



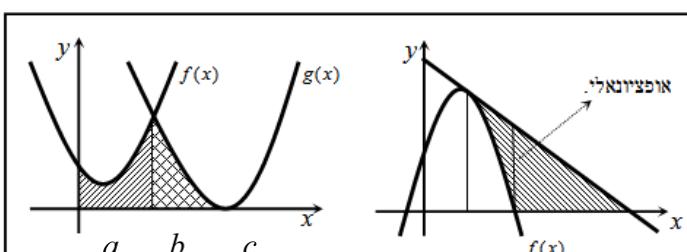
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני:

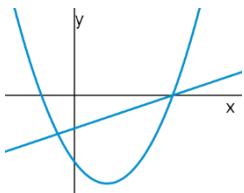


$$\begin{aligned} S_1 &= \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \\ S_2 &= \int_b^c (f(x) - g(x)) dx \\ S &= S_1 + S_2 \end{aligned}$$

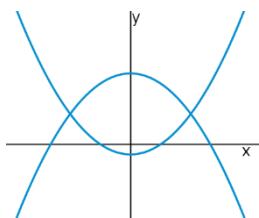
3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- x :



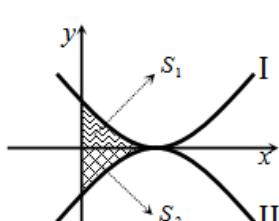
$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

שאלות

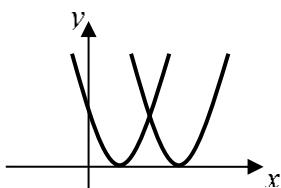
- 1) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 4x - 12$ ו- $g(x) = x - 6$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של f ו- g .



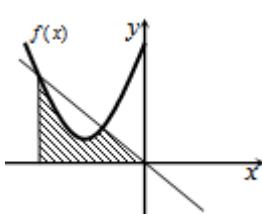
- 2) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 7 - x^2$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של f ו- g .



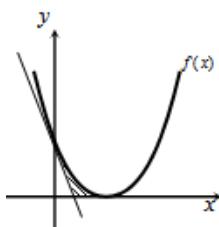
- 3) נתונות הפונקציות $f(x) = (x-2)^2$ ו- $g(x) = -(x-2)^2$,
 כמתואר באיוור.
 א. התאימו בין הפונקציות לgrafים I ו-II.
 ב. נסמן את השטחים שבין כל פונקציה והצירים
 ב- S_1 ו- S_2 , כמתואר באיוור.
 הראו כי השטחים S_1 ו- S_2 שווים זה לזה.



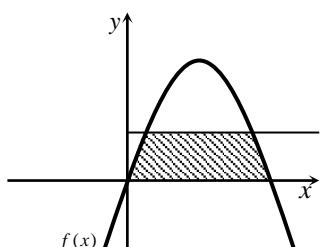
- 4) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- x .



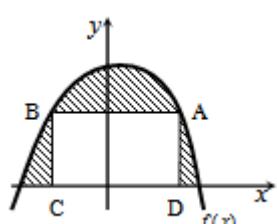
- 5) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + 6x + 12$.
 ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה
 בנקודת שבה $x = -4$, כמתואר באיוור.
 א. מצאו את משוואת הישר.
 ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.
 ג. מצאו את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x = -4$.



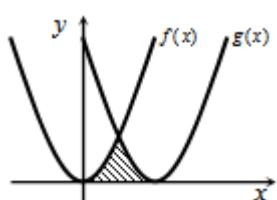
- 6) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-2)^2$.
 בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y נעביר משיק.
 א. מצאו את משוואת המשיק.
 ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .
 ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x (השטח המסומן).



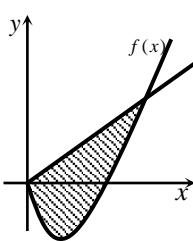
- 7) נתונה הפונקציה $f(x) = kx - x^2$.
 הישר $y=9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
 ידוע כי שיעור ה- x של אחת מנקודות אלה הוא $9=x$.
 א. מצאו את ערך הפרמטר k .
 ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.
 ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x (השטח המסומן).



- 8) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$, המתוארכת באיוור שלහלן,
 היא $y = 3 - 2x$. ישר AB , שמשוואתו $6 = f(x)$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו- B .
 מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x , כך שנוצר מלבן $ABCD$.
 ידוע שהשיעור ה- x של הנקודה A הוא $4=x$.
 א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x (השטח המסומן).

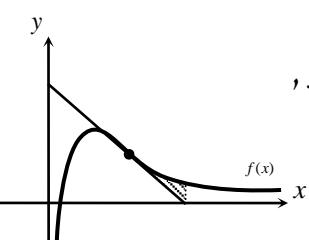


- 9) באיוור שלහלן חותך גרף הפונקציה $f(x) = x^2$ את גרף הפונקציה $g(x)$, בנקודת שבה $x=2$.
 הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x) = 2x - 8$.
 א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- x (השטח המסומן).

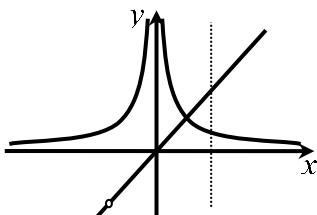


- . 10) באյור שלහלן מתוארים גראף הפונקציה $f(x)$ והישר x . $y = 2x$ נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = 2x - 6$, וידוע כי הישר חותך את הפונקציה בנקודה שבה ערך ה- y הוא 16. א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

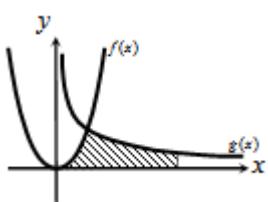
- ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן, מצאו אותן.
ג. חשבו את השטח המוגבל בין גראף הפונקציה והישר.



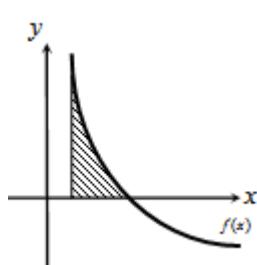
- . 11) ענו על הסעיפים הבאים:
א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ מצאו את משוואת המשיק ששיעורו מינימלי.
ב. באյור שלහלן מתוארים הגרפים של הפונקציה והמשיק שמצאת בסעיף א'. חשבו את השטח הכלוא בין גראף הפונקציה, המשיק, ואנך לציר ה- x , היוצא מנקודות החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .



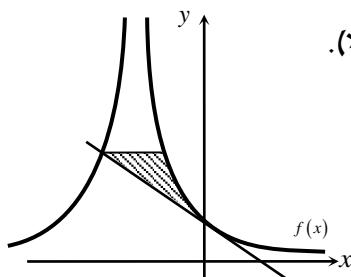
- . 12) נתונות שתי פונקציות $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x+2}$. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות, הישר $x=2$ וציר ה- x .



- . 13) באյור שלහלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = 2x^2$ ו- $g(x) = \frac{a}{x^2}$ (a קבוע), בתחום $x > 0$. ידוע כי הגרפים נחתכים ברגע הראשון, בנקודה הנמצאת על הישר $y = 4x$.
א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים ואת a .
ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר $y = 4x$.



- . 14) גראף הפונקציה $f(x) = \frac{a-x^2}{x^2}$ (a קבוע) חותך את ציר ה- x בנקודה $(6,0)$.
א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.
ב. חשבו את השטח המוגבל בין גראף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x=2$.



15) נתונה הפונקציה A) $f(x) = \frac{A}{(2x+A)^2}$ פרמטר חיובי.

ידעו כי שיפוע הפונקציה בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- y , הוא $-\frac{1}{9}$.

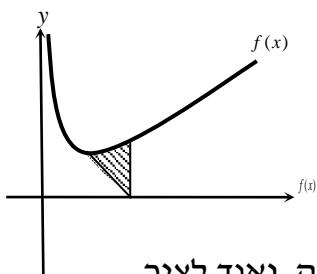
א. מצאו את ערך הפרמטר A .

ב. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודות החיתוך עם ציר ה- y .

ג. הראו כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -4.5$.

ד. העבירו ישר אופקי מנקודות החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם, ומצאו את נקודות החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזרו באיוור).

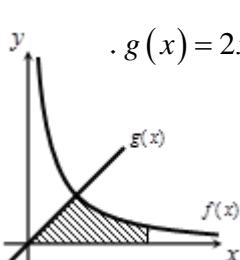


16) באיוור שלහן נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + x$.

א. מצאו את נקודות המינימום שלה.

ב. מנקודות המינימום של הפונקציה נعبر ישר לנקודה $(2,0)$, שעל ציר ה- x .

מצאו את השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה, ואנך לציר ה- x , היוצא מנקודה $(2,0)$ עד לנקודות החיתוך עם גרף הפונקציה.



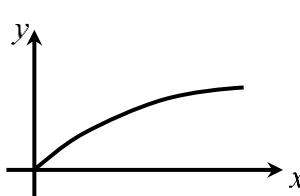
17) באיוור הבא מתוארים גרפים של הפונקציות $g(x) = 2x$ ו- $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$.

א. מצאו את נקודות החיתוך של הגрафים.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגראפים, ציר ה- x והישר $x = 9$.

18) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודות המינימום שלה וציר ה- y .



19) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ בריבוע הראשון.

לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים, חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,

המשיק והישר $\sqrt{3} = x$.

20) באյור שלහן מתואר גраф הפונקציה $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

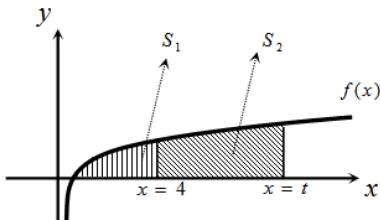
נעביר שני אנקים לציר ה- x , $x = 4$ ו- $x = t$ (כאשר $t > 4$).

נסמן את השטח הכלוא בין גраф הפונקציה וציר ה- x ב- S_1 ,

ואת השטח הכלוא בין גраф הפונקציה, ציר ה- x והאנקים ב- S_2 .

ידעו כי $S_2 = 8S_1$.

מצאו את t .



21) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x}}$

א. ענו על השעיפים הבאים:

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

2. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

3. הראו כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. נעביר משיק לגרף הפונקציה שיפועו הוא $\frac{17}{16} m$.

מצאו את נקודת ההשקה.

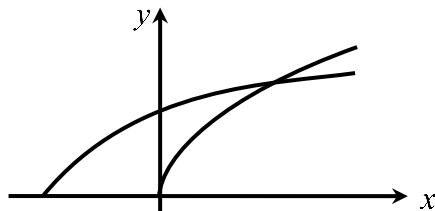
ג. חשבו את השטח הכלוא בין גраф הפונקציה, ציר ה- x ואנק לציר ה- x מנקודת ההשקה שמצויה בסעיף הקודם.

22) נתונות שתי פונקציות $f(x) = \sqrt{x+b}$, $g(x) = \sqrt{2x}$, כאשר ($b > 0$)

גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

ציר ה- x הוא $\frac{2}{3}$ יחידות שטח.

מצאו את ערכו של הפרמטר b .



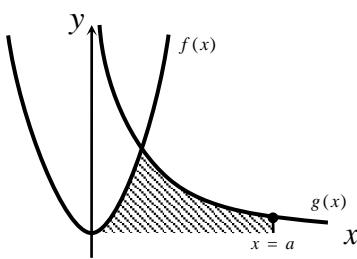
23) באյור שלහן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = \frac{32}{\sqrt{x}}$

בריבוע הראשון.

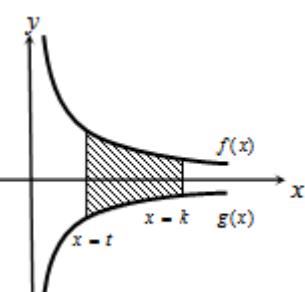
נעביר ישר $x = a$, החותך את גраф הפונקציה $g(x)$ ויצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר (השטח המסומן).

ידעו כי שטח זה שווה ל- $S = \frac{1}{3} 85$.

מצאו את a .



24) באIOR שלහן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $x = t$, אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות

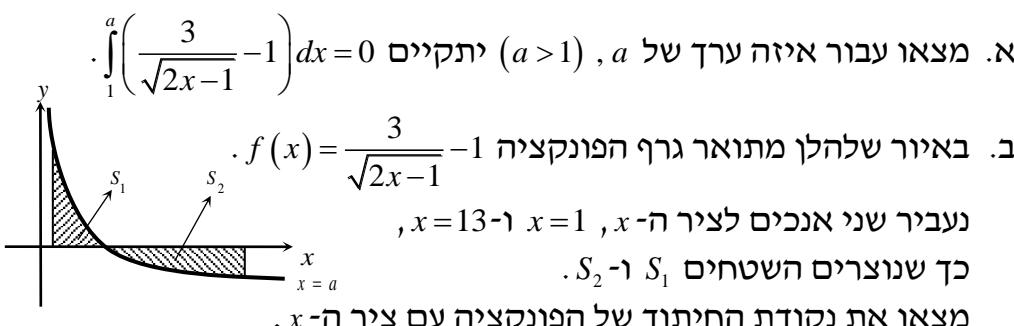


ונוצרים את הקטעים AB ו-CD. ידוע כי $AB = 2CD$.

א. הראו כי $k = 4t$.

ב. השטח הכלוא בין הפונקציות לבין הישרים $x = t$ ו- $x = k$ הוא $S = 12$. מצאו את t .

25) ענו על הטעיפים הבאים:



א. מצאו עבור איזה ערך של a יתקיים $\int_1^a \left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1 \right) dx = 0$.

ב. באIOR שלහן מתואר גוף הפונקציה $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1$, $x = 1$ ו- $x = 13$ נוצרים השטחים S_1 ו- S_2 .

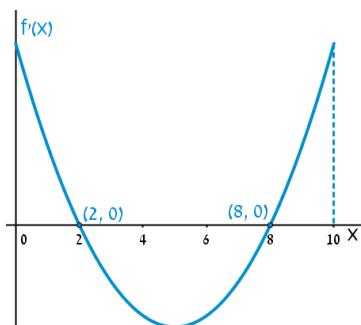
מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ג. ענו על תתי-הטעיפים הבאים:

1. חשבו את השטח הכלוא בין גוף הפונקציה,

ציר ה- x והאנך $x = 1$, כולם את S_1 .

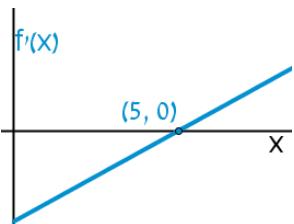
2. היעזרו בתוצאה שהתקבלה ובסעיף א' וקבעו כמה שווה השטח S_2 . נמקו.



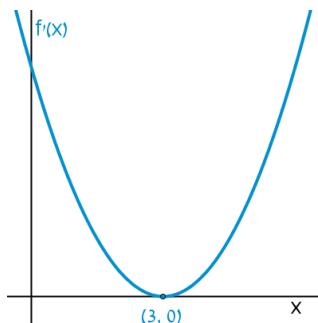
26) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 10$ בציור מתואר גוף הנגזרת $f'(x)$.

א. שרטטו סקיצה של גוף הפונקציה $f(x)$, $f(5) = 0$, $f(0) = -4$, $f(2) = 6$ ו- $f(10) > 0$.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י גוף הנגזרת והצירים בריבוע הראשון, עד לנקודת שבה $x = 2$.

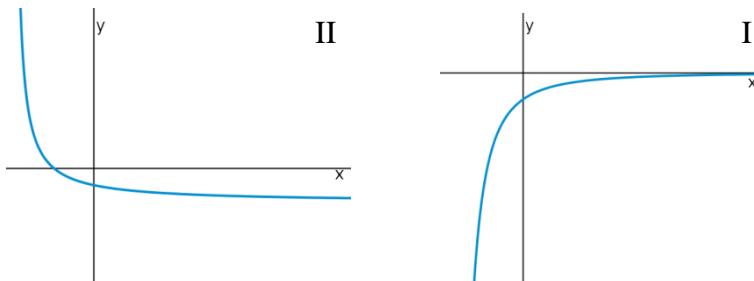


- 27) להלן גרף הפונקציה $f'(x)$, אשר חותך את ציר ה- x בנקודה אחת בלבד, $(5,0)$.
- מצאו את התחומים שבהם $f'(x)$ חיובית, ואת התחומים שבהם היא שלילית.
 - קבעו מהם תחומי העליה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
 - כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי שיעור ה- y שלו הוא -2 .
 - שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- y כאשר $y = 8$.
 - חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים.



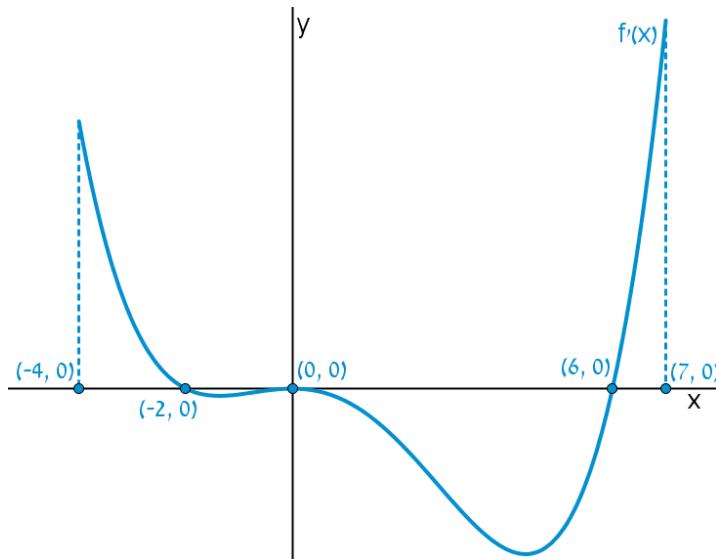
- 28) באIOR שלහלן מתוארת הנגזרת $f'(x)$.
- האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמקו.
 - שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי $f(3) = 4$, וכי היא חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -5$.
 - חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים בריבוע הראשון.

29) באIORים שלහלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$:



- זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.
- נתון $f(10) = -3$, וכי $f'(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -2$. מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$, הצירים והישר $x = 10$?

30) נתון גרף הנגזרת $f'(x)$

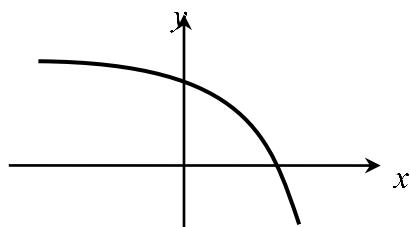


- א. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \leq x \leq 7$,
 לפי הנתונים $f(-2) = 7.6$, $f(0) = -2$, $f(6) = -606.8$.
- ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת לציר ה- x בריבוע השלישי.
- ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת לציר ה- x בריבוע הרביעי.

פונקציות מעריכיות

אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות

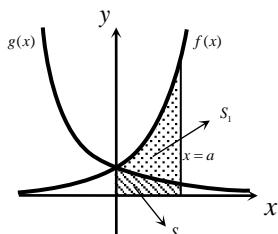
אינטגרלים יסודים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$



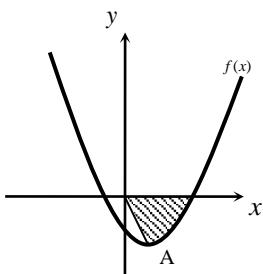
31) נתונה הפונקציה $f(x) = 5 - e^x$.
 העבירו לפונקציה משיק ששיופעו $-e$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין
 הפונקציה, המשיק וציר ה- x .
 ניתן להשאיר e ו- \ln בתשובה.

32) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{bx}$, כאשר $0 > b$.
 גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים
 וציר ה- y הוא $\frac{e-2}{4}$.
 מצאו את ערכו של הפרמטר b .

33) נתונות הפונקציות $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ ו- $g(x) = e^{-x}$.
 מנוקודה הנמצאת על גרף הפונקציה (x, g) בربיע הראשון הורידו אנך לשני
 הצירים. המשך האנד לציר ה- y חותך את הפונקציה $f(x)$,
 ומנקודות החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה- x , כך שנוצר מלבן.
 הוכיחו כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.



34) באIOR שלහן מתוארים גרפים של הפונקציות
 $f(x) = e^{2x}$ ו- $g(x) = e^{-2x}$.
 נעביר אנך לציר ה- x את הישר $a = x$,
 כאשר $0 > a$, כמתואר באIOR.
 אנך זה יוצר את השטחים S_1 ו- S_2 .
 ידוע כי השטח S_1 גדול פי 3 מהשטח S_2 .
 מצאו את a .



$$35) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = e^{2x-1} - 2ex - 2.$$

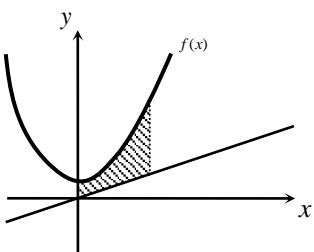
הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.

א. מצאו את שיעורי הנקודה A .

מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.

ב. כתבו את המשוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הרأسית.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=1.7$.



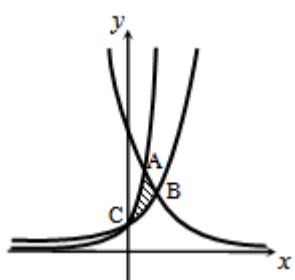
$$36) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$$

ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה $\left(1, \frac{e^3+1}{4e^2}\right)$.

א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.

ב. באյור שלහן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y = 0.1x$.

חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה- y והאנך $x=2$.



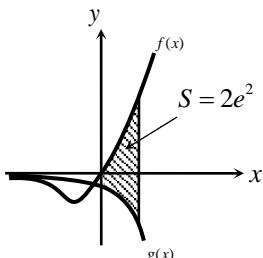
37) באյור שלහן מתוארים גרפים של שלוש פונקציות:

$$h(x) = 2^{4-2x}, \quad g(x) = 4^x, \quad f(x) = 2^x \cdot 1$$

א. קבעו איזה גרף מתאר כל פונקציה.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות A , B , C (נקודות החיתוך בין הגрафים).

ג. חשבו את השטח המסומן באյור.



38) ענו על הסעיפים הבאים:

א. גזרו את הפונקציה $y = e^x(x-1)$.

ב. באյור שלහן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x) = xe^x$ ו- $g(x) = -e^x$.

נעביר ישר $y = a$, כאשר $a > 0$, החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- y והישר (מקומו).

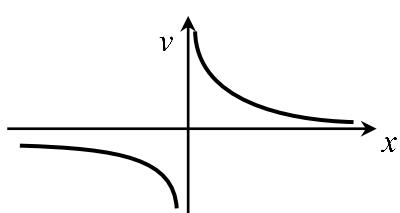
ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$.

מצאו את a .

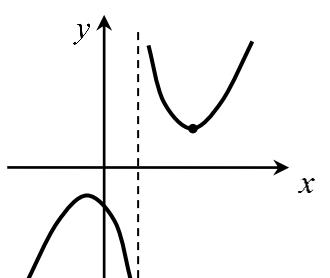
פונקציות לוגרิตמיות

אינטגרלים מיידיים של פונקציות לוגריטמיות

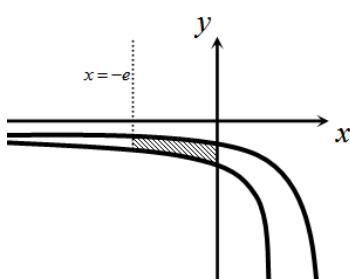
אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + c$



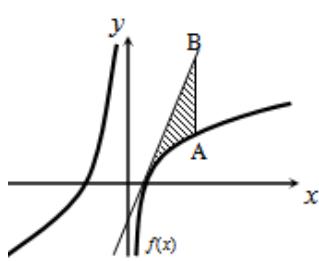
39) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישירים $x = -4$ ו- $x = -1$, וציר ה- x .
 ניתן להשאיר \ln בתשובה.



40) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת שבה $x = 2$, ואנך לציר ה- x העובר בנקודת המינימום שלה.
 אפשר להשאיר ביטוי עם \ln בתשובה.



41) באIOR שלහן נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{a}{x-1}$ ו- $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$, בתחום $x < 0$.
 ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודת שבה $x = 3$.
 א. מצאו את a וכתבו את שתי הפונקציות.
 ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- y והישר $x = -e$.



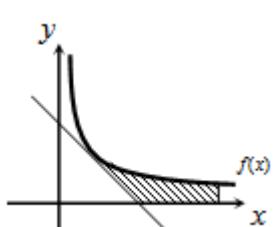
42) נתונה הפונקציה $f(x) = 7 + ax + \frac{b}{x}$.

ידוע כי משווהת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה החיתוך שלה עם ציר ה- x היא $y = 18x - 9$.
א. מצאו את a ו- b וכתבו את הפונקציה.

נעביר ישר המקביל לציר ה- y , שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A, ואת משווהת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

ב. מצאו את משווהת הישר הנ"ל, אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודה החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.

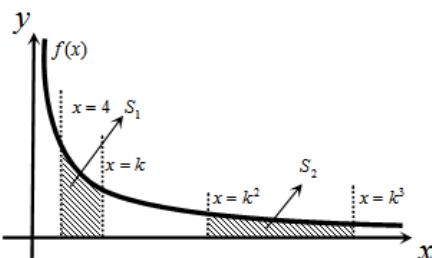


43) נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$.

משווהת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 2$ היא $y = 4 - x$.
א. מצאו את $f(x)$.

ב. באյור שלහלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ ומשיק, בתחום $x > 0$.

חסבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- x והישר $x = e^2$.



44) באյור שלහלן נתונה הפונקציה

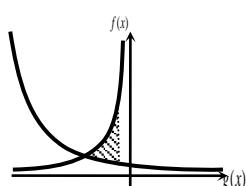
$$f(x) = \frac{2}{x}, \text{ בתחום } x > 0.$$

נעביר את הישרים $x = k$, $x = k^2$, $x = k^3$ ו- $x = 4$, כמתואר באյור ($x > 4$).

א. הבינו באמצעות k את השטחים S_1 ו- S_2 .

ב. הראו כי ההפרש $S_2 - S_1$ תלוי ב- k , וחסבו את ערכו.

ג. נתון כי השטח S_2 גדול פי 3 מהשטח S_1 .
מצאו את k .

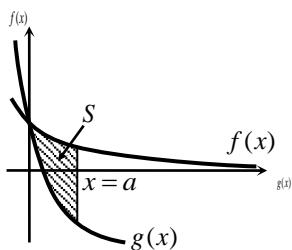


45) נתונות הפונקציות $g(x) = \frac{k}{2x+5}$ ו- $f(x) = -\frac{4}{x}$

גרף $(x) g$ חותך את ציר ה- y בנקודה שבה 4.
א. מצאו את הפונקציה $(x) g$.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשבו את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x = -1$.



46) באյור שלහלן מתוארים גרפים של הפונקציות

$$g(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-3x}) \quad f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$$

בתחום $x \geq 0$.

א. הראו כי הגרפים נחתכים על ציר ה- y .

ב. נعتبر ישר $x = a$ ($a > 1$), המאונך

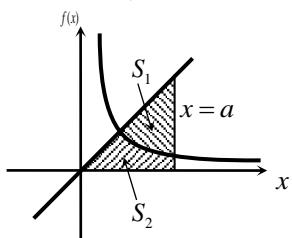
לציר ה- x , חותך את הגרפים של שתי

הfonקציות ויוצר את השטח S (ראה איור).

מצאו את ערכו של a , עבורו מתקיים $S = 4$.

47) באյור שלහלן מתוארים גרפים של הפונקציה $f(x) = \frac{2}{3x-1}$ והישר $x = a$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר, בربיע הראשון.



נعتبر אנכ' לציר ה- x , $x = a$, הנמצא מימין

לנקודת החיתוך שמצויה בסעיף הקודם.

האנ' חותך את הגרפים ויוצר את השטחים S_1 ו- S_2 , המתוארים באյור.

ב. מצאו את הערך של a , עבורו השטח S_2

$$\text{יהיה שווה ל- } \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 7$$

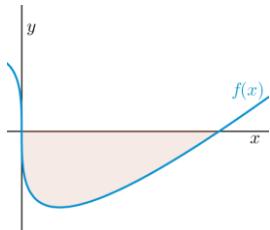
ג. עבור ערך ה- a שנמצא בסעיף הקודם, חשבו את יחס השטחים $\frac{S_1}{S_2}$.

פונקציית חזקה עם מעיריך רצionarioלי

אינטגרלים מיידיים של פונקציית חזקה עם מעיריך רצionarioלי

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m+1}{n}}}{\frac{m+1}{n}} + C$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m+1}{n}}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + C$

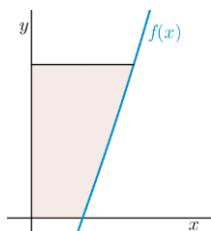
תנאי לקיום האינטגרציה $\frac{m}{n} \neq -1$.



. 48) באIOR שלහלן מופיע גרף הפונקציה $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$

א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ב. חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והציר.



. 49) באIOR שלහלן מופיע גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$

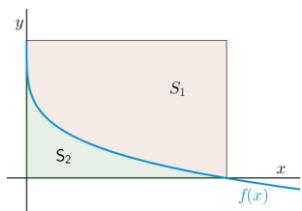
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ג. נעביר אנך לציר ה- y מנקודה (4,6).

חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והציר,

בריבוע הראשון.

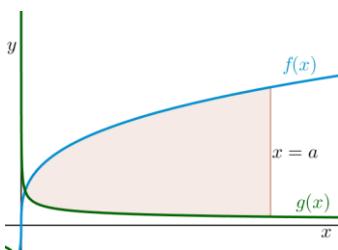


. 50) באIOR שלහלן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$

נעביר אנכים לצירים מנוקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, כך שנוצר מלבו,

ונסמן את השטח שבין גרף הפונקציה והציר x - ב- S_1 , ואת השטח שבין גרף הפונקציה והציר y - ב- S_2 .

מצאו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.



51) באյור שלහלן מתוארים גרפים של הפונקציות

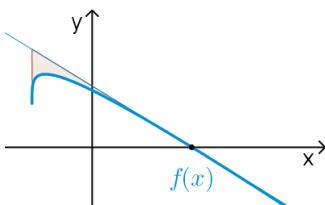
$$\cdot g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \text{ ו- } f(x) = 4\sqrt[3]{x}$$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום $0 < x$.

ב. נعتبر אנך לציר ה- x , $x = a$ (a פרמטר). ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים, מנוקדת החיתוך שלהם ועד לאנך,

$$\text{הוא } 42 \frac{3}{16} \text{ יח"ש.}$$

מצאו את a .



52) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - ax$, a פרמטר.

ידוע כי גраф הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודת שבה $x = 2$.

א. מצאו את הפרמטר a וכתבו את הפונקציה.

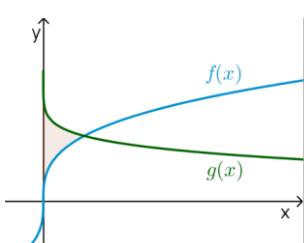
ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצאו את נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה.

ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה, העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .

ה. באյור שלහלן מתואר גраф הפונקציה $f(x)$ והמשיק שמצאנו בסעיף הקודם. נוריד אנך מהמשיק אל נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה שמצאנו בסעיף ג'.

חשבו את השטח הנוצר בין גраф הפונקציה $f(x)$ והמשיק.

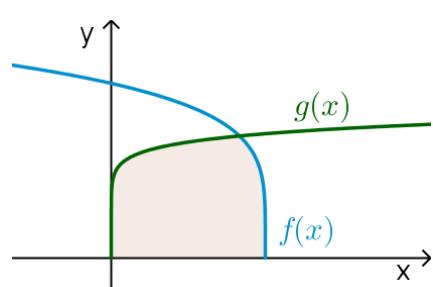


53) באյור שלහלן נתונים גרפים של הפונקציות

$$\cdot f(x) = 2 - \sqrt[6]{x} \text{ ו- } g(x) = \sqrt[3]{x}$$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- y .

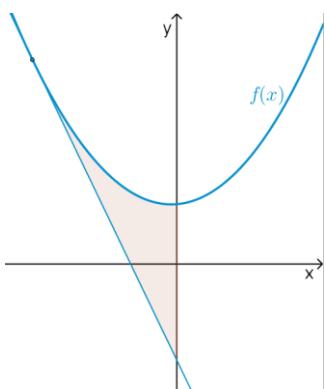


54) הנזורה של $f(x)$ היא $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$

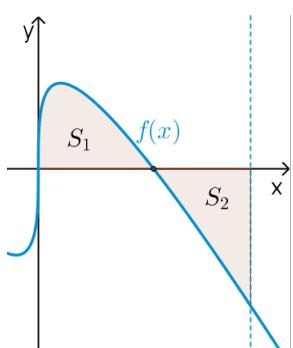
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודת שבה $x = 1.2$.

א. מצאו את $f(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גראף הפונקציה $f(x)$, גראף הפונקציה $g(x) = \sqrt[10]{x}$ וציר ה- x .



- 55) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{5-x}} + \frac{1}{2}x^2$.
 א. מצאו את משועצת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -3$.
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין גורף הפונקציה $f(x)$, המשיק וציר ה- y .



- 56) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x$.
 א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ג. באIOR שלහן מתוארך גורף הפונקציה בריבוע הראשון. השטח הכלוא בין גורף הפונקציה וציר ה- x יסומן ב- S_1 .
 נعتبر ישר $k = x$, אשר יוצר את השטח S_2 , כמתואר באIOR.
 מצאו את k , אם ידוע כי $S_1 = S_2$.

תשובות סופיות

.ג. $57\frac{1}{6}$ יחס'ש. (1)

.ב. $21\frac{1}{3}$ יחס'ש. (2)

.ב. שאלת הוכחה. $g(x) = \Pi, f(x) = I$. א. (3)

.ב. $\frac{2}{3}$ יחס'ש. (4)

.ג. $7\frac{5}{6}$ יחס'ש. ב. $(-3,3)$ ב. $y = -x$. א. (5)

.ג. $\frac{2}{3}$ יחס'ש. ב. $(1,0)$ ב. $y = -4x + 4$. א. (6)

.ג. $81\frac{1}{3}$ יחס'ש. ב. $(1,9)$ ב. $k = 10$. א. (7)

.ב. $27\frac{1}{6}$ יחס'ש. $f(x) = -x^2 + 3x + 10$. א. (8)

.ב. $5\frac{1}{3}$ יחס'ש. $g(x) = (x-4)^2$. א. (9)

.ג. $85\frac{1}{3}$ יחס'ש. ב. $(0,0)$ ב. $f(x) = x^2 - 6x$. א. (10)

.ב. $\frac{1}{8}$ יחס'ש. $y = -x + 2$. א. (11)

.ב. 1 יחס'ש. (12)

.ב. $13\frac{1}{3}$ יחס'ש. $(2,8), a = 32$. א. (13)

.ב. 8 יחס'ש. $f(x) = \frac{36-x^2}{x^2}, a = 36$. א. (14)

.ה. $\frac{5}{8}$.ג. $\left(-1.5, \frac{2}{3}\right)$.ד. $y = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}$.ב. $A = 6$. א. (15)

.ב. 1.75 יחס'ש. $\min(0.5, 1.5)$. א. (16)

.ב. 48 יחס'ש. $(4, 8)$. א. (17)

.ב. 2.26 יחס'ש. (18)

.ב. 0.5 יחס'ש. (19)

$t = 16$ (20)

.ג. 88 יחס'ש. $f'(x) = 1 + \frac{4}{x\sqrt{x}} > 0$.iii $(4, 0)$.ii $x > 0$.i. א. (21)

$b = 2$ (22)

$a = 9$ (23)

- (24) א. שאלת הוכחה. $t=1$ ב.
- . $S_2 = |-S_1| = 2 \cdot ii$ $S_1 = 2 \cdot g.i.$ (5,0) ב. $a=13$ א. (25)
- . $x < 5$, $x > 5$, שלילית: ב. עולה: $x < 5$, יורדת: $x > 5$. (26)
- . $x < 5$, $x > 5$, שלילית: ב. עולה: $x < 5$, יורדת: $x > 5$. (27)
- . ד. שאלת הוכחה. ה. 10 יחס. ג. $\min(5, -2)$.
- (28) א. לא. הנקודה (3,0) היא פיתול, מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה. ב. שאלת הוכחה. ג. 9 יחס. (29)
- . ב. 1 יחס. א. $f(x): II, f'(x): I$
- . ג. 604.8 יחס. (30)
- . ב. 9.6 יחס. (31)
- . ג. $S = 0.192$ יחס. (32)
- . (33) שאלת הוכחה. $b=2$ (34)
- . $a = \ln 2$ (35)
- . ג. $S = 4.744$ יחס. ב. $y = -(e+2)x$ א. $A(1, -e-2)$ (36)
- . 1.52 ב. $f(x) = \frac{e^x + e^{-2x}}{4}, a = -2$ א. (37)
- . ג. $S = 1.03$ יחס. ב. $A(1,4), B\left(1\frac{1}{3}, 2.52\right), C(0,1)$ ב. (38)
- . ג. $a = 2$ ב. $y' = xe^x$ א. (39)
- . ג. $S = 4 \ln 2 - 2$ (40)
- . ב. $f(x) = \frac{2}{x-1}, g(x) = \frac{1}{x-2}, a = 2$ א. (41)
- . ב. $x = 2$ ב. $f(x) = 7 + 2x - \frac{4}{x}, a = 2, b = -4$ א. (42)
- . ג. $S = 6 + \ln 256 \approx 11.54$ יחס. (43)
- . ב. $S = 6 - 4 \ln 2$ ב. $f(x) = \frac{4}{x}$ א. (44)
- . ג. $k = 8$ א. $S_2 - S_1 = \ln 16$ ב. $S_1 = 2 \ln k - \ln 16, S_2 = 2 \ln k$ א. (45)
- . ג. $S = \ln 5 \frac{1}{3} \approx 1.674$ ב. $(-2, 2)$ ב. $g(x) = \frac{2}{2x+5}$ א. (46)
- . ג. $a = 5$ ב. (47)
- . ג. $\frac{S_1}{S_2} = 5.955$ ב. $a = 5$ ב. (48)
- . ג. $S = 16$ יחס. ב. $(0,0), (8,0)$ א. (49)
- . ג. $S = 18.149$ ב. $(2,0)$ א. $x > 0$ א. (49)

$$\frac{S_1}{S_2} = 4 \quad (50)$$

$$a=8 \quad \text{ב.} \quad \left(\frac{1}{8}, 2\right) \quad \text{א.} \quad (51)$$

$$(-1.2, 1.2) \quad \text{ג.} \quad x \geq -1.2 \quad \text{ב.} \quad f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - x, a=1 \quad \text{א.} \quad (52)$$

$$S = 4.56 \quad \text{ה.} \quad y = -\frac{27}{32}x + \frac{27}{16} \quad \text{ט.}$$

$$S = \frac{11}{28} \quad \text{ב.} \quad (1,1) \quad \text{א.} \quad (53)$$

$$S = 1\frac{5}{66} \quad \text{ב.} \quad f(x) = (6-5x)^{\frac{1}{5}} \quad \text{א.} \quad (54)$$

$$S = 4.56 \quad \text{ב.} \quad y = -2\frac{15}{16}x - \frac{45}{16} \quad \text{א.} \quad (55)$$

$$k = \left(\frac{3}{8}\right)^{1.5} = 0.2296\dots \quad \text{ג.} \quad (0,0), \left(\frac{1}{8}, 0\right), \left(-\frac{1}{8}, 0\right) \quad \text{ב.} \quad .x \quad \text{א. כל} \quad (56)$$

אורקשת

שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון :

$$(1 \leq x \leq 8), \quad y = x^{2/3} \quad (2)$$

$$(1 \leq x \leq 2), \quad y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \quad (1)$$

$$(0 \leq x \leq 3), \quad y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \quad (4)$$

$$(1 \leq x \leq 2), \quad y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3} \quad (3)$$

$$(1 \leq x \leq 8), \quad x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad (6)$$

$$(0 \leq x \leq 3), \quad y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) \quad (5)$$

$$(1 \leq x \leq 2), \quad y = \ln x \quad (8)$$

$$(0 \leq y \leq 4), \quad x = 3y^{3/2} - 1 \quad (7)$$

$$(1 \leq x \leq 2), \quad y = x^2 \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$\frac{33}{16} \quad (1)$$

$$\frac{1}{9} \left\{ \frac{40^{1.5}}{3} - \frac{13^{1.5}}{3} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{1097}{480} \quad (3)$$

$$21 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ 2\sqrt{3} + \frac{2}{3} 3^{1.5} \right\} \quad (5)$$

$$9 \quad (6)$$

$$\frac{8}{243} \left\{ 82^{1.5} - 1 \right\} \quad (7)$$

$$\left\{ \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \right| \right\} - \left\{ \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right| \right\} \quad (8)$$

$$\sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{17} + 4) - \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5} + 2) \quad (\text{Decimal: } 3.16784) \quad (9)$$

чисוב שטחים ביחס לציר ה- y

שאלות

1) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2 = -x$ והישר $y = x + 6$.

2) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $x = y^2 + 2$ והישר $x = 8 - y$.

תשובות סופיות

$$20\frac{5}{6} \quad (1)$$

$$20\frac{5}{6} \quad (2)$$

אינפי 2

פרק 9 - שימושי האינטגרל המסוים (נפח-שטח מעטפת)

תוכן העניינים

75	1. חישוב נפח גוף-סיבוב.....
78	2. חישוב שטח מעטפת גוף-סיבוב.....
79	3. חישוב נפח גוף כללי.....

חישוב נפח גוף-סיבוב

שאלות

1) השטח הכלוא בין גרף הפונקציות $y = x^2$ ו- $y = 1 - 2x$ מסתובב סביב ציר ה- x .

חשבו את נפח הגוף המתתקבל בשתי דרכים:

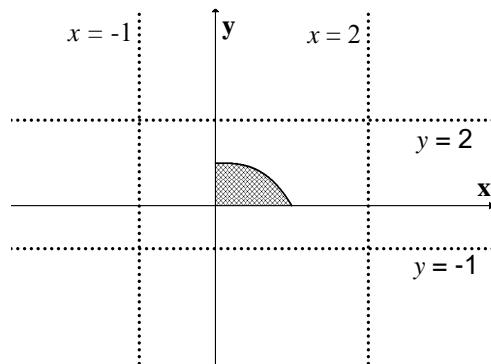
- א. שיטת הדיסקאות (cavalieri).
- ב. שיטת הקלייפות בגליליות.

2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציות $y = x^2$ ו- $y = 1 - 2x$ מסתובב סביב ציר ה- y .

חשבו את נפח הגוף המתתקבל בשתי דרכים:

- א. שיטת הדיסקאות (cavalieri).
- ב. שיטת הקלייפות בגליליות.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = 1 - x^3$ והצירים, מסתובב סביב ציר קלשחו.
מצאו את נפח הגוף המתתקבל בכלל מקרה בשאלות 3-8:



3) ציר ה- x .

4) הישר $y = -1$.

5) הישר $y = 2$.

6) ציר ה- y .

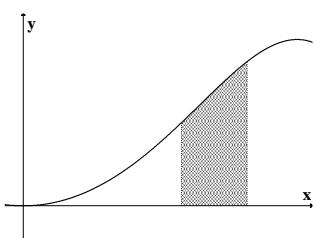
7) הישר $x = -1$.

8) הישר $x = 2$.

9) נחו ווכיחו את הנוסחה לחישוב נפח גליל.

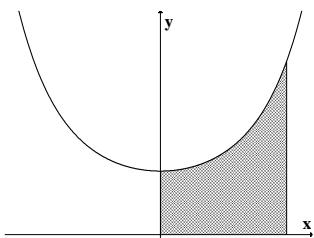
10) נחו ווכיחו את הנוסחה לחישוב נפח חרוט.

11) נחו ווכיחו את הנוסחה לחישוב נפח כדור.



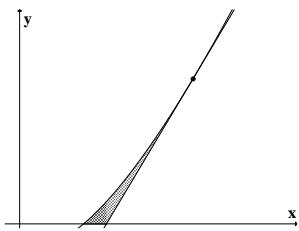
12) השטח הכלוא בין גраф הפונקציה $y = \sin(x^2)$

$$\text{והישרים } , x = \sqrt{\frac{\pi}{6}}, x = \sqrt{\frac{\pi}{3}}, y = 0 \\ \text{מסתובב סביב ציר ה-} y. \\ \text{מהו נפח הגוף המתתקבל?}$$



13) השטח הכלוא בין גراف הפונקציה $y = e^{x^2}$

$$\text{והישרים } , y = 0, x = 0, x = 1 \\ \text{מסתובב סביב ציר ה-} y. \\ \text{מהו נפח הגוף המתתקבל?}$$



14) השטח הכלוא בין גראף הפונקציה $f(x) = x \ln x$

$$\text{המשיק לגרף בנקודת } (e, e) \text{ וציר ה-} x. \\ \text{מסתובב סביב ציר ה-} x. \\ \text{מהו נפח הגוף המתתקבל?}$$

15) השטח הכלוא בין הגרפים של $f(x) = x^2$, $f(x) = 2x + 8$, $x = 0$

$$\text{מסתובב סביב הישר } x = 4. \\ \text{מצאו את נפח הגוף הסיבוב שמתתקבל.}$$

תשובות סופיות

$$\frac{64}{15}\pi \text{ ב. } \quad \frac{64}{15}\pi \text{ א. } \mathbf{(1)}$$

$$\frac{8}{3}\pi \text{ ב. } \quad \frac{8}{3}\pi \text{ א. } \mathbf{(2)}$$

$$\frac{9\pi}{14} \mathbf{(3)}$$

$$\frac{15\pi}{7} \mathbf{(4)}$$

$$\frac{33\pi}{14} \mathbf{(5)}$$

$$\frac{3\pi}{5} \mathbf{(6)}$$

$$2.1\pi \mathbf{(7)}$$

$$\frac{12\pi}{5} \mathbf{(8)}$$

$$V = \pi R^2 \cdot H \mathbf{(9)}$$

$$V = \frac{\pi R^2 \cdot H}{3} \mathbf{(10)}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \mathbf{(11)}$$

$$\frac{\pi}{2}(\sqrt{3}-1) \mathbf{(12)}$$

$$\pi(e-1) \mathbf{(13)}$$

$$\frac{e^3-4}{54}\pi \mathbf{(14)}$$

$$128\pi \mathbf{(15)}$$

чисוב שטח מעטפת של גוף-סיבוב

שאלות

1) הפונקציה $y = \sqrt{4 - x^2}$, עבור $-1 \leq x \leq 1$, מסתובבת סביב ציר ה- x . מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

2) נסחו והוכחו את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של חרוט.

3) נסחו והוכחו את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של כדור.

4) הפונקציה $x = \sqrt{9 - y^2}$, עבור $-3 \leq y \leq 3$, מסתובבת סביב ציר ה- y . מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

תשובות סופיות

$$8\pi \quad (1)$$

$$S = \pi R \sqrt{H^2 + R^2} \quad (2)$$

$$S = 4\pi R^2 \quad (3)$$

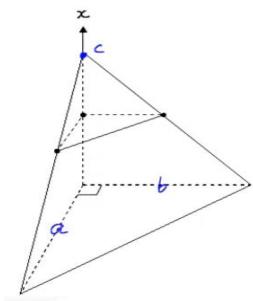
$$24\pi \quad (4)$$

чисוב נפח גוף כללי

שאלות

1) מצאו נוסחה לחישוב נפח פירמידה ישרה, אשר גובהה h ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו a .

2) חשבו את נפח של פירמידה, שבבסיסה הוא משולש ישר זווית (ראו איור).



תשובות סופיות

$$V = \frac{a^2 h}{3} \quad (1)$$

$$\frac{abc}{6} \quad (2)$$

איןפי 2

פרק 10 - המשפט היסודי של החדו"א, משפטיו הערך הממוצע לאינטגרלים

תוכן העניינים

1. המשפט היסודי של החדו"א - תרגילי חישוב.....	80
2. המשפט היסודי של החדו"א - תרגילי תיאוריה	83
3. משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים	86

המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי חישוב

שאלות

בשאלות 1 ו-2, על סמך המשפט היסודי של החדו"א, הוכיחו כי אם f רציפה וגם $a(x)$ ו- $b(x)$ גזירות, אז:

$$I(x) = \int_a^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) \quad (1)$$

$$I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x) \quad (2)$$

גזרו את הפונקציות בשאלות 3-6:

$$I(x) = \int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t^2} dt \quad (4)$$

$$I(x) = \int_2^x e^{-t^2} dt \quad (3)$$

$$I(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \quad (6)$$

$$I(x) = \int_2^{x^3+x} t \ln t dt \quad (5)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 7-9:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4} \int_4^x e^{t^2} dt \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{tdt}{\cos t}}{\sin^2 x} \quad (7)$$

$$(10) \text{ חשבו את הגבול} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$$

11) חקרו את הפונקציה $F(x) = \int_0^x (t+1)^4 (t-1)^{10} dt$, לפי הפירוט הבא:

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

12) נתונה הפונקציה $f(x) = 2 + \int_0^x (e^{y^2} + 2)^2 dy$, כאשר $g(t) = \int_0^{t^2-1} f(x) dx$.
חשבו את $(g''(x))$ (הוכיחו כי f רציפה).

13) תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
נגידיך $x \in \mathbb{R}$ לכל $g(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt$
הוכיחו כי $(g'(x)) = f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

14) תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, וכי $\alpha \neq 0$.
נגידיך $x \in \mathbb{R}$ לכל $g(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x f(t) \sin[\alpha(x-t)] dt$
הוכיחו כי $(f''(x)) = g''(x) + \alpha^2 g(x)$

15) תהי f פונקציה רציפה וחיוונית לכל $x \geq 0$.
. $[0, \infty)$ מונוטונית יורדת בקטע $z(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x t f(t) dt}$ הוכיחו כי הפונקציה

16) מצאו את $\int_2^x \frac{t^3 - t + 2}{t^2 - t} dt = \int_2^x f(t) dt + 2 \int_2^x \frac{1}{t-1} dt$, אם נתנו כי $\int_e^4 f(x) dx$

17) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $F(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2} dt$, בנקודת 2π

תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

$$I'(x) = e^{-x^2} \quad (3)$$

$$I'(x) = \frac{\ln(x)^3}{(x^3)^2} \cdot 3x^2 \quad (4)$$

$$I'(x) = (x^3 + x)(3x^2 + 1)\ln(x^3 + x) \quad (5)$$

$$I'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \quad (7)$$

$$\frac{2}{3} \quad (8)$$

$$4e^{16} \quad (9)$$

$$0 \quad (10)$$

(11) תחומי הגדרה : כל x .

נקודות קיצון : אין קיצון, עולה לכל x .

$$\text{נקודות פיתול : } x = -1, 1, -\frac{3}{7}$$

. $-1 < x < -\frac{3}{7}$, $x > 1$ תחומי קמירות :

. $x < -1$, $-\frac{3}{7} < x < 1$ תחומי עיריות :

$$40 \quad (12)$$

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

$$14 - 2\ln 4 - \frac{1}{2}e^2 - e \quad (16)$$

$$y = x - 2\pi \quad (17)$$

המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי תיאוריה

שאלות

1) נתונה הפונקציה f המוגדרת בקטע $[0, 2]$ כך:

א. הוכיחו ש- f אינטגרבילית בקטע הנתון.

ב. מצאו את $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ לכל x בקטע הנתון.

ג. בדקו האם $F(x)$ רציפה/גזירה בקטע.

ד. האם $? F'(x) = f(x)$

2) נתונה הפונקציה f המוגדרת בקטע $[1, 1]$ כך:

א. הוכיחו ש- f אינטגרבילית בקטע הנתון.

ב. מצאו את $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$ לכל x בקטע הנתון.

ג. בדקו האם $F(x)$ רציפה/גזירה בקטע.

ד. האם $? F'(x) = f(x)$

3) נגדיר $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$. F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ נגדיר $F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי

הוכיחו כי $F' = f$ ב- $[-1, 1]$, אבל $\int_{-1}^1 f(t)dt$ לא קיים.

האם הדבר עומדת בסתיויה למשפט היסודי של החדו"א?

4) נתונה פונקציה אינטגרבילית $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$. \int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)dt$

5) תהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a, b]$, המקיימת $\int_a^b f(t) dt > 1$

הוכיחו שקיימים $x_1, x_2 \in (a, b)$, כך $\int_a^{x_1} f(t) dt = 1$, $\int_{x_2}^b f(t) dt = 1$.

6) תהי f פונקציה רציפה ומוחזורת לכל x , עם מחזור p .

הוכיחו שלaintגרל $\int_x^{x+p} f(t) dt$ יש את אותו הערך לכל $x \in \mathbb{R}$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי הפונקציה $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$ קבועה בקטע $(0, \infty)$

ומצאו את הקבוע הממשי C עבורו מתקיים $f(x) = C$ לכל $x \in (0, \infty)$.

ב. הוכיחו כי $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ לכל $x > 0$.

8) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ונניח כי $\int_0^1 f(x) dx = 1$

הוכיחו שקיים נקודה $c \in (0, 1)$ כך ש- $f(c) = 3c^2$.

9) תהי f פונקציה רציפה ב- $[-\pi/2, \pi/2]$ ונניח כי $\int_0^{\pi/2} f(t) dt = 0$

הוכיחו שקיים נקודה $c \in (0, \pi/2)$ כך ש- $f(c) = 2 \cos 2c$.

10) תהי $f: [0, \pi/4] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

הוכיחו שקיים $c \in [0, \pi/4]$ כך ש- $\int_0^{\pi/4} f(t) dt = f(c)$.

11) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה.

הוכיחו שקיים $c \in (0, 1)$ כך ש- $f(0) + \frac{1}{2} f'(c) = f(1)$.

12) תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נניח כי $\int_a^x f(t) dt = \int_x^b f(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$

הוכיחו כי $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

13) תהי f פונקציה רציפה ב- $[a, b]$, ונניח כי קיימות שתי נקודות, $x_1 < x_2$,

$$\int_a^{x_1} f(t) dt = \int_a^{x_2} f(t) dt$$

בקטע (a, b) , שקיימים מתקיים

א. הוכיחו כי קיים $c \in (a, b)$, כך ש- $f(c) = 0$.

ב. האם הטענה שבסעיף אי נכונה גם אם לא נדרש ש- f רציפה ב- $[a, b]$?

ונסתפק בדרישה החלשה יותר, ש- f אינטגרבילית ב- $[a, b]$? נמו.

14) מצאו פונקציה קדומה לפונקציה $f(x) = e^{-|x|}$.

15) תהי f פונקציה אינטגרבילית בכל קטע $[a, b]$,

$$\int_0^x f(t) dt$$

וనניח שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

הוכיחו כי $f(x) \equiv 0$ (כלומר, לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(x) = 0$).

תשובות סופיות

1) א. שאלת הוכחה. ב. רציפה ולא גזירה.
 $F(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$.
 ד. לא.

2) א. שאלת הוכחה. ב. $F(x) = 0$ לכל x בקטע הנטוון. ג. רציפה וגזירה.
 ד. לא.

7) א. $C = 0$. ב. שאלת הוכחה.

$$F(x) = \begin{cases} -e^{-x} + D + 2 & x \geq 0 \\ e^x + D & x < 0 \end{cases} \quad (14)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפטי הערך המומוצע לאינטגרלים

שאלות

1) בشرطן התיאוריה הוכחנו את משפט הערך המומוצע לאינטגרלים בעזרת משפט ערך הביניים של קושי.
נסחו והוכיחו את משפט הערך המומוצע לאינטגרלים בעזרת משפט הערך המומוצע של לגראנז'.

2) תהי f רציפה ב- $[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx = 1$.
הוכיחו שקיימים פתרון למשוואת $(b-a)f(x) = 1$.

3) תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$, ונניח כי $x_1 < x_2 \leq b$.
וכי $\int_a^{x_1} f(t)dt = \int_a^{x_2} f(t)dt$.
הוכיחו שקיימים $x \in (a, b)$, שubboרו $f(x) = 0$.

4) הוכיחו, ללא חישוב האינטגרל, כי $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx < \frac{1}{n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

5) תהי f פונקציה רציפה ויורדת בקטע $[n, n+1]$.
הוכיחו כי $f(n+1) < \int_n^{n+1} f(x)dx < f(n)$.

6) יהיו $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות רציפות המקיימות $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.
הוכיחו שקיים נקודה $c \in [a, b]$ כך ש- $f(c) = g(c)$.

7) תהי $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x^n)dx = f(0)$.

8) תהי $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

$$\text{נתון כי } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$$

$$\text{הוכיח כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx = a$$

9) חשבו את הערך הממוצע של הפונקציה $f(x) = \sin x \sin(x + \alpha)$ בקטע $[0, 2\pi]$.

10) נזכר במשפט הערך הממוצע לאינטגרלים.

תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

$$\text{אז קיימת נקודה } c \in (a, b) \text{ כך ש- } \int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

הראו שהמשפט לעיל אינו נכון, אם נחליף את דרישת הרציפות בדרישה לאינטגרביליות.

$$11) \text{ הוכח כי } \frac{3}{\ln 2} \leq \int_2^4 \frac{x}{\ln x} dx \leq \frac{6}{\ln 2}$$

$$12) \text{ הוכח כי } \frac{\pi^2}{9} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x}{\sin x} dx \leq \frac{2\pi^2}{9}$$

$$13) \text{ הוכח כי } \frac{1}{2e} \ln 2 \leq \int_0^{\pi/4} e^{-x^2} \tan x dx \leq \frac{1}{2} \ln 2$$

14) תהי $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

$$\text{הוכח כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n f(x) dx = 0$$

15) נחו ווכיחו את משפט הערך הממוצע האינטגרלי השני.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

אינפי 2

פרק 11 - אינטגרלים לא אמיתיים

תוכן העניינים

88	1. אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון
90	2. אינטגרל לא אמיתי מסוג שני
91	3. אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי
92	4. שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים
93	5. מבחני השוואה
95	6. הטענסות בהחלה
96	7. מבחון דיריכלה
97	8. הטענסות בתנאי

אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-5:

$$\int_1^{\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} \quad (1)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx \quad (3)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+5} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} x^2 e^{-2x} dx \quad (5)$$

6) הוכחו כי $\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\alpha \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$. $|\alpha| < 1$, עבור

7) הוכחו כי $\int_0^{\pi} \frac{1}{\alpha - \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$. $|\alpha| > 1$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2e} \quad (3)$$

(4) מתבדר : ∞ .

$$\frac{5}{4e^2} \quad (5)$$

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} \quad (1)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \quad (2)$$

תשובות סופיות

- (1) מתבדר : ∞ .
- (2) מתבדר : ∞ .

אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי

שאלה

1) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

תשובה

1) מתבדר : ∞ .

שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים

שאלות

1) חשבו את השטח בין גرف הפונקציה $y = e^{2x}$, הישר $x=1$ וציר ה- x עבור $1 \leq x$.

2) חשבו את השטח בין גرف הפונקציה $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ציר ה- y , ציר ה- x והישר $x=5$.

3) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^3}}$.
 ידוע כי השטח הכלוא בין גرف הפונקציה לבין ציר ה- x , בתחום $0 \leq x \leq k$, שווה לשטח הכלוא בין גرف הפונקציה לבין ציר ה- x , בתחום $x \geq k$.
 מצאו את הקבוע k .

תשובות סופיות

$$\frac{1}{2}e^2 \quad (1)$$

$$2\sqrt{5} \quad (2)$$

$$k = \sqrt[3]{\ln 2} \quad (3)$$

מבחני השוואה

שאלות

בדקו את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים :

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 4x^2 + 5} dx \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 + 4x^2 + 5} dx \quad (1)$$

$$\int_3^{\infty} \frac{\sin x \cdot \ln x}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^4} dx \quad (3)$$

$$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x} dx \quad (6)$$

$$\int_1^{\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) dx \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1+x^2} dx \quad (8)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (10)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{1+x} dx \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (12)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (14)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x^2}-1)} dx \quad (13)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt[4]{(x-1)^5} \sqrt{(1+x)^5}} dx \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2(x+\sqrt{x})} dx \quad (15)$$

תשובות סופיות

- 2) מתבדר.
4) מתכנס.
6) מתבדר.
8) מתכנס.
10) מתכנס.
12) מתבדר.
14) מתבדר.
16) מתכנס.
- 1) מתכנס.
3) מתכנס.
5) מתבדר.
7) מתכנס.
9) מתבדר.
11) מתכנס.
13) מתכנס.
15) מתכנס.

התכנסות בהחלה

שאלות

בשאלות 1-3 בדקו האם האינטגרלים מתכנסים :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1} dx \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-10x} \sin 4x dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \quad (3)$$

4) הוכיחו : אם $\int_a^{\infty} f(x) dx$ מתכנס, או $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ מתכנס.

תשובות סופיות

- (1) מתכנס.
- (2) מתכנס.
- (3) מתכנס.
- (4) שאלת הוכחה.

מבחן דיריכלה

שאלות

הוכיחו כי האינטגרלים הבאים מתכנסים :

$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^p \cos x}{x} dx \quad (1)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 0) \text{ א.} \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} \sin(x^2) dx \quad \text{ב.}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{\sin x} \sin x \cos x}{x^p} dx \quad (p > 0) \quad (3)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

התכנסות בתנאי

שאלות

קבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלה, בתנאי או מתבדרים:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1) . \text{ א. } (1)$$

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1) . \text{ ב.}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1) . \text{ ג.}$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1) . \text{ א. } (2)$$

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1) . \text{ ב.}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1) . \text{ ג.}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx . \text{ א. } (3)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x^4)}{x^p} dx . \text{ ב.}$$

$$\int_2^\infty \frac{\sin 4x}{\sqrt{x-1}} dx . \text{ ג.}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x \sin(\tan x)}{\cos x} dx . \text{ ד.}$$

תשובות סופיות

- 1) א. מתכנס בהחלט עבור $p < 1$ ומ turbulent עבור $p \geq 2$.
ב. מתכנס בהחלט.
ג. מתכנס בהחלט עבור $p < 1$ ומ turbulent עבור $p \geq 2$.
- 2) א. מתכנס בהחלט. ג. מתכנס בתנאי.
ב. מתכנס בתנאי. .
- 3) א. מתכנס בתנאי עבור $1 \leq p < 0$, מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$,
 . turbulent עבור $p \geq 2$.
ב. מתכנס בתנאי עבור $-3 < p \leq 1$, מתכנס בהחלט עבור $5 < p < 1$,
 . turbulent עבור $p \geq 5$.
4) מתכנס בתנאי.
5) מתכנס בתנאי.

אינפי 2

פרק 12 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

99	1. טורים מתכניים וטורים מתבדרים
102	2. מבחן ההתבדרות של טורים
103	3. מבחני התכנסות לטרים חיוביים
105	4. מבחני התכנסות לטרים כלליים
107	5. התכנסות בחילט והכנסות בתנאי
108	6. תרגילי תיאוריה

טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

שאלות

טור גיאומטרי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-6.
במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} \quad (5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \quad (4)$$

טור טלקופי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 7-11.
במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} \quad (8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))} \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (11)$$

טור הרמוני מוכלל

: 12) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} \quad \text{ג.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{ב.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{א.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} \quad \text{ד.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} \quad \text{ה.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} \quad \text{כ.}$$

תכונות אלגבריות של טוריים

13) בדקו את התכונות הטוריים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \quad \text{ג.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2} \quad \text{ב.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right) \quad \text{א.}$$

14) חבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, אם ידוע כי

15) מצאו את השבר הרציונלי, שהצגתו העשרונית היא ...0.123123123...+0.141414...

תשובות סופיות

1) מתכנס ל- $\frac{11}{14}$. **2)** מתכנס ל-. $\frac{1}{3}$. **3)** מתבדר.

4) מתכנס ל-. $\frac{64}{7}$. **5)** מתכנס ל-. $\frac{11}{12}$. **6)** מתכנס ל-8.

7) מתכנס ל-. $\frac{1}{2}$. **8)** מתכנס ל-. $\frac{1}{12}$. **9)** מתבדר.

$$\frac{1}{12} \quad \mathbf{(11)} \qquad S = \frac{1}{\ln 2} \quad \mathbf{(10)}$$

12) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.

ד. מתכנס. ה. מתבדר. ו. מתכנס.

13) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.

$$\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4} \quad \mathbf{(14)}$$

$$\frac{323}{1221} \quad \mathbf{(15)}$$

מבחן ההתבדרות של טורים

שאלות

1) בדקו את התכונות הטוריים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n \quad \text{ג.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad \text{ב.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \quad \text{א.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n} \right)^n \quad \text{ג.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n \quad \text{ה.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2} \quad \text{ד.}$$

תשובות סופיות

1) א-ו : מתבדר.

מבחני התכנסות לטורים חיוביים

שאלות

מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-5 (קבעו אם הטור מתכנס או מתרბדר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2 + 1} \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2 + 1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p \leq 1) \quad (5) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p > 1) \quad (4)$$

6) ענו על הסעיפים הבאים :

א. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

ב. מצאו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n^3}$

מבחן ההשוואה ו מבחן ההשוואה הגוביי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 7-15 (קבעו אם הטור מתכנס או מתרბדר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 4n + 1}{\sqrt{n^{10} + n + 1}} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 10n + 1} \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \sin^2 n}{n!} \quad (12)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 2}{3^n + 2n} \quad (11)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4 + n + 1}} \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2 + 1} \quad (15)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) \quad (14)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2 + 1} - n \right) \quad (13)$$

מבחן המנה, מבחן השורש ובחן ראנָבָה

בדקו את התכונות הטוריים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \quad (18)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n+2)} \quad (17)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \quad (21)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (20)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad (19)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (24)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(1+n^2)}{n!} \quad (23)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \quad (26) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \quad (25)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|-------------|-------------|---------------|
| (3) מתכנס. | (2) מתבדר. | (1) מתבדר. |
| (4) מתכנס. | (5) מתבדר. | (6) א. מתכנס. |
| | ב. 0 | (7) מתכנס. |
| (9) מתכנס. | (8) מתבדר. | (10) מתבדר. |
| (12) מתכנס. | (11) מתכנס. | (13) מתבדר. |
| (15) מתכנס. | (14) מתכנס. | (16) מתבדר. |
| (18) מתכנס. | (17) מתכנס. | (19) מתכנס. |
| (21) מתכנס. | (20) מתכנס. | (22) מתכנס. |
| (24) מתכנס. | (23) מתכנס. | (25) מתבדר. |
| | (26) מתבדר. | |

מבחני התכנסות לטורים כלליים

מבחן ליבניץ

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 3-1 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (3) \quad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} \quad (1)$$

מבחן דיריכלה

בשאלות 4 ו-5, קבעו אם הטור מתכנס או מתרוגס :

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{2}{16} + \dots \quad (4)$$

$$\sum \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n+1} \quad (5)$$

6) הוכיחו שהטורים $\sum \sin n\theta$, $\sum \cos n\theta$, כאשר $\theta \neq 2\pi k$, חסומים.

7) הוכיחו את התכנסות הטורים הבאים :

$$(\theta \neq 2\pi k) \quad \sum \frac{\sin n\theta}{n}, \quad \sum \frac{\cos n\theta}{n+1}, \quad \sum \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n+4}}$$

8) בדקו התכנסות הטור $\sum \frac{\sin^2 n}{n}$

9) הוכיחו שאם הסדרה b_n יורדת ושוואפת לאפס, אז הטור $\sum b_n \sin n$ מתכנס.

10) ענו על שני הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} (3-n)(\text{mod } 7)$ הוא טור חסום.

ב. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-n)(\text{mod } 7)}{\sqrt{n+1}}$

מבחון אבל

קבעו האם הטור מתכנס או מתבדר :

$$\sum \frac{(-1)^n n}{4^n - 4^{2n}} \quad (12)$$

$$\sum \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\sqrt{n+4}} \quad (11)$$

$$\sum \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^2} \quad (14)$$

$$\sum \frac{(-1)^n \ln(1+n^{-1})}{n} \quad (13)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|-------------|-------------|----------------|
| (3) מתכנס. | (2) מתכנס. | (1) מתכנס. |
| (6) הוכחה. | (5) מתכנס. | (4) מתכנס. |
| (9) הוכחה. | (8) מותבדר. | (7) הוכחה. |
| (11) מתכנס. | ב. מתכנס. | (10) א. הוכחה. |
| (14) מתכנס. | (13) מתכנס. | (12) מתכנס. |

התכנסות בהחלה והתכנסות בתנאי

שאלות

בשאלות הבאות, קבעו אם הטור מתכנס בהחלה, מתכנס בתנאי או מתבדר :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln n} \right)^n \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3} \quad (5)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} \quad (8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (7)$$

תשובות סופיות

- | | |
|-----------------|-----------------|
| 1) מתבדר. | 2) מתכנס בהחלה. |
| 4) מתכנס בתנאי. | 5) מתכנס בהחלה. |
| 7) מתכנס בתנאי. | 8) מתכנס בתנאי. |
| 3) מתכנס בתנאי. | |
| 6) מתכנס בתנאי. | |
| 9) מתכנס בתנאי. | |

תרגילי תיאוריה

1) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $(\sum a_n + b_n)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתכנס, אז $(\sum a_n + b_n)$ מתבדר.

2) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ב. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס, אז $\sum \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס.

3) הוכחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + (-1)^n)$ מתבדר.

4) הוכחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ חיובי ומתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

5) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.
הוכחו כי $\sum \left(1 - \frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)$ מתכנס.

6) א. נתון טור חיובי $\sum a_n$.
הוכחו כי $\sum \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ מתבדר.

ב. נתון טור מתכנס $\sum a_n$.
הוכחו ש- $\sum |a_n|$ מתבדר אם $\sum a_n^2$ מתבדר.

הערה: אין קשר בין השעיפים

7) תהי (a_n) סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכחו כי $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$ מתכנס.

8) הוא טור אי-שלילי ומתכנס. $\sum a_n$

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n + 4^n}{a_n + 10^n}$ מתכנס.

9) הוכיחו או הפריכו:

אם הסדרה $(a_n)_{n \geq 1}$ מקיימת $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ לכל n , אז $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.

10) נניח כי $a_n \geq 0$.

הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

11) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס והסדרה b_n חסומה, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

12) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

13) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בתנאי.

14) נתון טור חיובי $\sum a_n$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ לכל n , אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ לכל n , אז הטור מתבדר.

15) נתון טור חיובי ומוגדר $\sum a_n$.
הוכיחו כי $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

16) נתונים שני טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$.

א. נתון שהטורים $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ מתכנסים.

הוכיחו כי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

2. הוכיחו כי $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתקנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

17) הוכיחו :

א. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) = k \neq 0$, אז הטור מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ חיובי ואם $\sum (na_n - k)$ מתכנס (כאשר $k \neq 0$), אז $\sum a_n$ מתבדר.

18) הוכיחו כי אם $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 a_n) = k$, אז הטור מתכנס.

19) נתון $a_n \geq 0$ לכל n .

א. נתון כי $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 a_n^2 = k > 0$.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

ב. נתון כי $\sum (n^3 a_n^2 - k)$ מתכנס (כאשר $k > 0$).

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

20) הסדרה (a_n) מוגדרת על ידי $a_1 = \frac{21}{20}, a_2 = -\frac{1}{2}, a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, כאשר $(n \geq 1)$

האם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס?

$$\text{21) הטור } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מוגדר כך: } a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$$

הוכיחו כי הטור מתכנס.

$$\text{22) נתון טור חיובי ומתכנס } \sum a_n, \text{ ונתון כי לכל } n \text{ מתקיים } a_{n+1} \leq a_n. \text{ הוכיחו כי } \sum n(a_n - a_{n+1}) \text{ מתכנס.}$$

$$\text{23) נתון } \forall n \geq 1: 0 < a_n < 1, 4a_n(1-a_{n+1}) > 1. \text{ האם } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - 1) \text{ מתכנס?}$$

$$\text{24) נניח כי } (a_n) \text{ סדרה המקיים } a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1} < 0 \text{ לכל } n \text{ טבעי. הוכיחו כי } \sum a_n \text{ מתבדר.}$$

$$\text{25) (a}_n\text{) היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס. הוכיחו כי } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \text{ מתבדר.}$$

- $$\text{26) נתון טור חיובי } \sum a_n. \text{ הוכיחו או הפריכו:}$$
- אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.
 - אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

27) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי הסדרה a_n מותכנת אם ורק אם $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ מותכנת.

ב. בדקו האם הסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ מותכנת.

ג. בדקו האם הסדרה $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ מותכנת.

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמדו את הנושא טורי מקולון עם שארית לגרנץ'.

28) פונקציה f מוגדרת לכל x , גזירה ב- 0 ומקיימת $f(0) = 0$.
הוכיחו כי אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אז $\sum f(a_n)$ מתכנס בהחלט.

29) נתון $p(x)$ פולינום.
 $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.
 $p(0) = 0 \Leftrightarrow \sum P(a_n)$ מתכנס.

30) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טוריים חיוביים.
נתון כי :

(1) הטור $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ מתכנס.(2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טבעי.
הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התיאוריה תוכלו למצוא באתר : GooL.co.il

איןפי 2

פרק 13 - סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטוריות חזקות

תוכן העניינים

113	1. סדרות פונקציות
116	2. טורי פונקציות
118	3. טורי חזקות
120	4. גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

סדרות פונקציות

שאלות

עבור כל אחת מסדרות הפונקציות שבסעיפים 1-11:

א. בדקו התכנסות נקודתית של סדרת הפונקציות.

במידה והסדרה מתכנסת מצאו את הפונקציה הגבולית.

ב. בדקו התכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות.

$$\cdot (0,1) \text{ ב- } f_n(x) = x^n \quad (2) \quad \cdot [0,0.5] \text{ ב- } f_n(x) = x^n \quad (1)$$

$$\cdot [0,1] \text{ ב- } f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \quad (4) \quad \cdot (0,\infty) \text{ ב- } f_n(x) = \arctan(nx) \quad (3)$$

$$\cdot [0.5,4] \text{ ב- } f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \quad (6) \quad \cdot [0,1] \text{ ב- } f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad (5)$$

$$\cdot \mathbb{R} \text{ ב- } f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \quad (8) \quad \cdot \mathbb{R} \text{ ב- } f_n(x) = \frac{1}{x^2 + n} \quad (7)$$

$$\cdot [0,1] \text{ ב- } f_n(x) = n(1-x)x^n \quad (10) \quad \cdot \mathbb{R} \text{ ב- } f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+x^2+n^2} \quad (9)$$

$$\cdot [0,1] \text{ ב- } f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ n(x-1)+1 & 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{12) נתונה סדרת הפונקציות } f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[0, 4]$?
 ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0, 4]$?
 ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר המשמי?
 ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר המשמי?

$$\text{13) נתונה סדרת הפונקציות } f_n(x) = nx e^{-n^2 x^2}$$

- א. האם הסדרה מתכנסת נקודתית בקטע $[0, \infty)$?
 ב. האם הסדרה מתכנסת במיש בקטע $[0, \infty)$?
 ג. האם הסדרה מתכנסת במיש בקטע $[1, \infty)$?

$$\text{14) נתונה } f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[n, n + \frac{1}{n} \right] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר המשמי?
 ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר המשמי?

$$\text{15) נגדיר את סדרת הפונקציות } f_n(x) = \left[1 - \chi_n(x) \right] \left(x + \frac{1}{n} \right)^{-1} + n^\alpha \cdot \chi_n(x)$$

$$\cdot \chi_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left(n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2} \right) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ כאשר}$$

- א. מהם ערכי הפרמטר α , עבורם סדרת הפונקציות $(f_n(x))$
 מתכנסת נקודתית ב- $[1, \infty)$?
 אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?
 ב. מהם ערכי הפרמטר α , עבורם סדרת הפונקציות $(f_n(x))$
 מתכנסת במידה שווה ב- $(\infty, 1]$?

תשובות סופיות

- 1)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ב. מתכנסת במידה שווה.
- 2)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- 3)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \frac{\pi}{2}$.
ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- 4)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$.
ב. לא במידה שווה.
- 5)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- 6)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 0 & 0.5 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & x=1 \\ 1 & 1 < x \leq 4 \end{cases}$.
ב. לא במידה שווה.
- 7)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ב. מתכנסת במידה שווה.
- 8)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2}$.
ב. מתכנסת במידה שווה.
- 9)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ב. מתכנסת במידה שווה.
- 10)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- 11)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$.
ב. מתכנסת במידה שווה.
- 12)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ג. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ד. אינה מתכנסת במידה שווה.
- 13)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ב. לא במידה שווה. ג. כן.
- 14)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- 15)** א. לכל ערך של α ממשי יש התכנסות נקודתית בתחום $(1, \infty)$, לפונקציה $\frac{1}{x}$.
ב. רק אם $\alpha < 0$.

טורר פונקציות

שאלות

מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות 1-6:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!(x-5)^n} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot [\ln(nx)]^4} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n} \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)} \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \quad (5)$$

בדקו התחום הטעון שווה של הטורים הבאים, בתחום המופיע לידם:

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (7)$$

$$(-1 \leq x \leq 1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}} \quad (8)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+x^2}} \quad (9)$$

$$\left(\frac{1}{4} \leq x \leq 4 \right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}) \quad (10)$$

$$(-a \leq x \leq a) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right) \quad (11)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1 + n^7 x^2} \quad (12)$$

תשובות סופיות

$$x > 0 \quad (1)$$

$$x \neq 5 \quad (2)$$

$$x < 3\frac{9}{10} \text{ or } 4\frac{1}{10} \quad (3)$$

$$0 < x \neq \frac{1}{n} \quad (4)$$

$$x > 0 \quad (5)$$

$$x \neq 0, -1, -2, -3, \dots \quad (6)$$

(7) מתכנס במידה שווה.

(8) מתכנס במידה שווה.

(9) מתכנס במידה שווה.

(10) מתכנס במידה שווה.

(11) מתכנס במידה שווה.

(12) מתכנס במידה שווה.

טוריות חזקות

שאלות

מצאו את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות 1-12 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} x^n \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{(2n+1)} x^{2n} \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}} \quad (5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin^2 \frac{1}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^n} \quad (9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(2n-2)!} x^n \quad (8)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} (x-1)^n \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n+1}}{n \cdot 2^{2n+1}} \quad (12)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^4 \cdot 100^n} \quad (11)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (x+5)^n \quad (10)$$

מצאו את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות, וקבעו את תחום ההתכנסות :

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (15)$$

$$f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (14)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (18)$$

$$f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (17)$$

$$f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (16)$$

$$f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (20)$$

$$f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (19)$$

הערות חשובות

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות נמצא בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתורן תרגילים 19 ו-20, יש להכיר את הנושא 'פירוק לשברים חלקיים'.

תשובות סופיות

$$-\infty < x < \infty, R = \infty \quad (2)$$

$$-1 \leq x < 1, R = 1 \quad (1)$$

$$-1 \leq x \leq 1, R = 1 \quad (4)$$

$$-0.2 \leq x \leq 0.2, R = 0.2 \quad (3)$$

$$-1 < x < 1, R = 1 \quad (6)$$

$$-3 < x \leq -1, R = 1 \quad (5)$$

$$-\infty < x < \infty, R = \infty \quad (8)$$

$$x = 1, R = 0 \quad (7)$$

$$-\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}, R = 4/3 \quad (10)$$

$$-5 < x \leq 3, R = 4 \quad (9)$$

$$-7 < x < -3, R = 2 \quad (12)$$

$$-9 \leq x \leq 11, R = 10 \quad (11)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (14)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (13)$$

$$(|x| < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (16)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (15)$$

$$(|x| < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (18)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (17)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (20)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n \quad (19)$$

גזרה וaintגרציה של טורי חזקות

שאלות

פתחו לטור חזקות את הפונקציות בשאלות 7-1 :

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \ln(1+x) \quad (2)$$

$$f(x) = \ln(1-x) \quad (3)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (4)$$

$$f(x) = \ln(5-x) \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (6)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \quad (7)$$

$$(8) \text{ חשבו את סכום הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$$

$$(9) \text{ חשבו את סכום הטור } \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n) x^{n-1}$$

(10) ענו על הטעיפים הבאים :

א. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

ב. מהו סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n (2n-1)}$

11) ענו על הסעיפים הבאים :

a. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$

b. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2n}(4n-3)}$

12) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{4n}(4n-1)}$

13) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

תשובות סופיות

$$(-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (2)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (1)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (4)$$

$$(-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (3)$$

$$(|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (6)$$

$$(-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (5)$$

$$\frac{20}{27} \quad (8)$$

$$(|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (7)$$

$$\frac{1}{4} \ln 3 . \text{ב.} \quad \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \quad |x| < 1 . \text{א} \quad (10)$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} \quad |x| < 1 \quad (9)$$

$$\frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} \right) . \text{ב}$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + \frac{1}{2} \arctan x \quad |x| < 1 . \text{א} \quad (11)$$

$$\arctan x \quad |x| \leq 1 \quad (13)$$

$$\frac{1}{10} \left(\frac{1}{4} \ln \frac{11}{9} - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{10} \right) \quad (12)$$

AINAFI 2

פרק 14 - טורי טיילור - מקלורן

תוכן העניינים

1. טור טיילור וטור מקלורן	122
2. טור טיילור סביב $X=0$	124
3. חישוב סכום של טור	125
4. חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן	126
5. חישובים מקורבים עם השארית של לייבנץ	127
6. חישוב מקורב של אינטגרל מסוים	129
7. חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'	130
8. נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות	136

טור טיילור וטור מקלורו

שאלות

בשאלות 1-24 מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביבה $x = 0$ (טור מקלורו) :

$$f(x) = \sinh x \quad (3)$$

$$f(x) = x^2 e^{-4x} \quad (2)$$

$$f(x) = \sin 2x \quad (1)$$

$$f(x) = 2^x \quad (6)$$

$$f(x) = \cos^2 x \quad (5)$$

$$f(x) = \sin^2 x \quad (4)$$

$$f(x) = \arcsin x \quad (9)$$

$$f(x) = \ln(2 - 3x + x^2) \quad (8)$$

$$f(x) = x \cos(4x^2) \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (12)$$

$$f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (11)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (15)$$

$$f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (14)$$

$$f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (18)$$

$$f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (17)$$

$$f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (16)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (21)$$

$$f(x) = \ln(1-x) \quad (20)$$

$$f(x) = \ln(1+x) \quad (19)$$

$$f(x) = \arctan \left(\frac{x}{3} \right) \quad (24)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (23)$$

$$f(x) = \ln(5-x) \quad (22)$$

הערות : לפתרון שאלות 15 ו-16, יש להזכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.

לפתרון סעיפים 18, 19, 23 ו-24 יש להזכיר את הנושא גזירה וaintגרציה של טורי מקלורו.

אפשר להיעזר בפתרונות הידועים לטור מקלורו המופיעים בספר.

בשאלות 25-27 מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורו של הפונקציות (נדרש ידוע ככפל וחילוק של פולינומים) :

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x} \quad (27)$$

$$f(x) = \tan x \quad (26)$$

$$f(x) = e^{-x^2} \cos x \quad (25)$$

תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!} \quad (2) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!} \quad (6) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (5) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (4) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$(-1 \leq x < 1) \quad \ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (8) \quad (-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!} \quad (7)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (10)$$

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (9) \quad (-1 < x < 1)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (12)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (11)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (14)$$

$$(|x| < 5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (13)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n \quad (16)$$

$$(|x| < 3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (15)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (18)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (17)$$

$$(-1 \leq x < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (20)$$

$$(-1 < x \leq 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (19)$$

$$(-5 \leq x < 5) \quad \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (22)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (21)$$

$$(|x| \leq 3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (24)$$

$$(|x| < \frac{1}{2}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (23)$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (26)$$

$$1 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{25}{24} x^4 - \frac{331}{720} x^6 + \dots \quad (25)$$

$$x - x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{30} x^5 + \dots \quad (27)$$

טור טיילור סביב $x = x_0$

שאלות

מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x_0 = x$ של הפונקציות הבאות:

$$(x_0 = 1) \quad f(x) = \ln x \quad (1)$$

$$(x_0 = 2) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (2)$$

$$\left(x_0 = \frac{\pi}{2} \right) \quad f(x) = \sin x \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} \quad (1) \\ (0 < x \leq 2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}} \quad (2) \\ (0 < x < 4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!} \quad (3) \\ (-\infty < x < \infty)$$

чисוב סכום של טור

שאלות

חשבו את סכום הטורים הבאים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} \quad (2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (6)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \quad (4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)} \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad (8)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad (7)$$

תשובות סופיות

$\pi/4 \quad (5)$

$2e \quad (4)$

$\sqrt{e} \quad (3)$

$e^{-2} \quad (2)$

$e \quad (1)$

$\ln \frac{3}{2} \quad (9)$

$\ln 2 \quad (8)$

$\cos 1 \quad (7)$

$\sin 1 \quad (6)$

чисוב גבולות בעזרת טורי מקלורו

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו את ערך הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (3) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} \quad (1)$$

(4) נתון כי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{x^2} - 1}{x^n} = k$ כאשר k קבוע שונה מאפס.
מצאו את n ואת k .

(5) חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln(1 - \ln x)]^{x-1}$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{120} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$k = 1, n = 3 \quad (4)$$

$$1 \quad (5)$$

чисובים מקורבים עם השארית של ליבנץ

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו בשגיאה הקטנה מ-0.001 :

$$\arctan 0.25 \quad (3)$$

$$\sin 3^\circ \quad (2)$$

$$\frac{1}{e} \quad (1)$$

בשאלות 4-6 חשבו בעזרת n איברים ראשוניים (שונים מאפס), בפיתוח לטור מקלרון, והעריכו את השגיאה בחישוב :

$$(n=4) \ln 1.5 \quad (6)$$

$$(n=1) \cos 4^\circ \quad (5)$$

$$(n=3) \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (4)$$

7) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$ עבור $|x| \leq \frac{\pi}{6}$?

8) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $x \approx \ln(1+x)$ עבור $|x| < 0.01$?

9) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ עבור $|x| \leq 0.2$?

10) עברו אילו ערכי x , כך $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$ בשגיאה הקטנה מ-0.001?

11) עברו אילו ערכי x , כך $\arctan x \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$ בשגיאה הקטנה מ-0.01?

תשובות סופיות

$$\frac{53}{144} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{60} \quad (2)$$

$$\frac{47}{192} \quad (3)$$

$$\frac{1}{48}, \text{ בשגיאת הקטנה מ- } \frac{5}{8} \quad (4)$$

$$\frac{\pi \cdot \pi}{4050}, \text{ בשגיאת הקטנה מ- } 1 \quad (5)$$

$$\frac{1}{160}, \text{ בשגיאת הקטנה מ- } \frac{77}{192} \quad (6)$$

$$\frac{(\pi/6)^5}{5!} \quad (7)$$

$$\frac{(0.01)^2}{2} \quad (8)$$

$$\frac{(0.2)^6}{6!} \quad (9)$$

$$|x| < \sqrt[5]{3/25} \quad (10)$$

$$|x| < \sqrt[9]{9/100} \quad (11)$$

чисוב מוקרוב של אינטגרל מסוים

שאלות

חשבו בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- ε :

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (1)$$

$$(\varepsilon = 0.001) \quad \int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (2)$$

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$\frac{449}{2250} \quad (1)$$

$$\frac{39}{400} \quad (2)$$

$$\frac{143}{576} \quad (3)$$

чисובים מוקרבים עם השארית של לגראנץ'

1) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt{x+4}$ סביב 0, $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנץ'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt{5}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $0 < x$ מתקיים :

$$2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 < \sqrt{x+4} < 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{512}x^3$$

ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב ? $|x| < 0.1$

2) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{64+x}$ סביב 0, $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנץ'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[3]{66}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $0 < x$ מתקיים :

$$4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 < \sqrt[3]{64+x} < 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{5308416}x^3$$

3) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה $f(x) = \tan x$ סביב 0, $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנץ'.

חשבו בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\tan 0.1$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $0 < x < 1$ מתקיים :

$$x < \tan x < x + 4\sqrt{3}x^2$$

4) רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{x}$ סביב 16, $x_0 = 16$, כולל שארית לגראנץ'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[4]{15}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

5) חשבו את $\sqrt[3]{29}$ ברמת דיוק של 10^{-3} .

6) חשבו את $\sin 36^\circ$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{1000000}$, בשתי דרכים :

א. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x = 0$.

ב. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x = \frac{\pi}{4}$.

מי מהטורים טוב יותר על מנת לחשב את $\sin 36^\circ$? נמקו.

$$7) \text{ נתונה } f(x) = \sqrt{1+x}.$$

- א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 1 עבור $1 \leq x \leq 0$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

$$\text{ב. הוכחו שלכל } 0 \geq x \text{ מתקיים } x \leq \sqrt{1+x}.$$

$$8) \text{ נתונה } f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

- א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 3 עבור $0.9 \leq x \leq 0.1$, והעריכו את השגיאה בקירוב.
- ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת

$$0.1 \leq x \leq 0.9, \frac{1}{1+x} \approx 1-x+x^2-x^3$$

$$\text{ג. הוכחו כי עבור } x < -1 \text{ מתקיים } \frac{1}{1+x} \geq 1-x+x^2-x^3.$$

$$9) \text{ נתונה } f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}.$$

- א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 2, עבור $|x| \leq 0.5$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

- ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת

$$|x| \leq 0.5, \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$$

$$\text{ג. פתרו את אי השוויון } \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} < 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2, \text{ עבור } -1 < x < .$$

10) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מצאו את נוסחת מקלוון עבור $f(x) = e^x$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

$$\text{ב. חשבו את } \sqrt[e]{e} \text{ ברמת דיוק של } 10^{-4}.$$

- ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$$0 \leq x \leq 1, e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

- ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(-1, 1)$, שבעירוי $|e^x - p(x)| < 10^{-5}$.

11) ענו על הסעיפים הבאים :

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x) = \ln(1+x)$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\ln 1.5$ ברמת דיוק של 10^{-4} .

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת :

$$\ln(1+x) \cong x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(0,1)$, שבעורו $|\ln(1+x) - p(x)| < 10^{-2}$

ה. הוכחו כי לכל $0 < x$ מתקיים אי השוויון $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} < \ln(1+x) < x$

12) תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[0,1]$,

ונניח ש- $f''(0) = f''(1) = 0$ ו- $|f''(x)| \leq M$ לכל $0 < x < 1$

$$\text{הוכחו כי } |f'(x)| \leq \frac{M}{2} \text{ לכל } 0 \leq x \leq 1$$

13) תהי $f : [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיים $f(-1) = f(1) = 0$

כמו כן, נתון כי קיימים M , כך ש- $|f''(x)| \leq M$ בקטע.

$$\text{הוכחו שלכל } -1 \leq x \leq 1 \text{ מתקיים } |f(x)| \leq \frac{M}{2}$$

14) תהי f פונקציה גזירה ב- $(0, \infty)$, ונניח כי M לכל $x < 0$ $|f'(x)| \leq M$

$$\text{הוכחו כי } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$$

15) תהי $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיים $f''(x) \geq 0$ לכל $x \in [a,b]$

ונניח כי $x_0 \in [a,b]$

א. הוכחו שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

ב. הוכחו כי $\cos x - \cos y \geq (x - y) \sin(\frac{x+y}{2})$ לכל $x, y \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

16) תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ונניח כי קיימים :

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, \quad M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|, \quad M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$$

$$\text{הוכחו כי } (M_1)^2 \leq 2M_0M_2$$

17) נתנו ש- f גזירה פעמיה ב- $(0, \infty)$ ו- f'' חסומה ב- $(0, \infty)$.
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$$

תשובות סופיות

1) א. נוסחה : $\sqrt[3]{64+x} = 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{81\sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$
 $\cdot \frac{5}{663552}$, שגיאת בקירוב : $\sqrt[3]{66} = 4 + \frac{1}{24} - \frac{1}{2304} = \frac{9311}{2304}$
 ב. שאלת הוכחה.

2) א. נוסחה : $\tan 0.1 = \frac{1}{10}$, $\tan x = x + \frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2$, שגיאת בקירוב :
 ב. שאלת הוכחה.

3) א. נוסחה : $\sqrt{x+4} = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 - \frac{1}{16\sqrt{(c+4)^8}}x^3$
 $\cdot \frac{1}{512}$, שגיאת בקירוב : $\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{143}{64}$
 ב. שאלת הוכחה.

4) נוסחה : $\sqrt[4]{x} = 2 + \frac{1}{32}(x-16) - \frac{3}{4096}(x-16)^2 + \frac{7}{128\sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$
 $\cdot \frac{1}{3130}$, שגיאת בקירוב :

$$\sqrt[4]{29} = 3 \frac{158}{2187} \quad (5)$$

$$\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4} \right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12} \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4} \right)^3. \quad \text{ב.}$$

$$\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} - \frac{\frac{\pi^3}{5^3}}{3!} + \frac{\frac{\pi^5}{5^5}}{5!} - \frac{\frac{\pi^7}{5^7}}{7!}. \quad \text{א.}$$

$$\sqrt{1+x}, \text{ בשגיאת הקטנה מ-} 0.25. \quad \text{ב.}$$

$$\text{א. } \frac{6561}{10000} \text{ בשגיאת הקטנה מ-} \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \quad (8)$$

ב. שגיאת הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$. ג. שאלת הוכחה.

$$\text{א. } \frac{7}{27} \text{ בשגיאת הקטנה מ-} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2. \quad (9)$$

ב. השגיאת המקסימלית היא $\frac{7}{27}$. ג. ראו בסרטון.

$$\sqrt{e} = 1.6487 \quad \text{ב. } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}. \quad \text{א.}$$

$$p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!}. \quad \text{ט.} \quad \frac{3}{(n+1)!}.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}} x^{n+1} . \quad \text{א. (11)}$$

$$\ln(1.5) = 0.5 - \frac{0.5^2}{2} + \frac{0.5^3}{3} - \frac{0.5^4}{4} + \frac{0.5^5}{5} - \frac{0.5^6}{6} + \frac{0.5^7}{7} - \frac{0.5^8}{8} + \frac{0.5^9}{9} . \quad \text{ב.}$$

$$p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^{101}}{101} - \frac{x^{102}}{102} . \quad \text{ג. שאלת הוכחה.}$$

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

הערה לגבי קירובים

כאשר נדרש לספק קירוב שהוא מדויק ל- n ספרות אחרי הנקודה, אז علينا לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- 0.5×10^{-n} .
 למשל, דיקוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעתו, שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5 \times 10^{-3} = 0.0005$.
 בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך במקרים מסוימים נעשה בו שימוש.

נוסחאות – טורי מקלורו של פונקציות חשובות

טור מקלורו

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

תחום התכנסות

$$-\infty < x < \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$-1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$$

$$-1 < x < 1$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n$$

$$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$$-1 \leq x \leq 1 \ (m > 0)$$

$$-1 < x \leq 1 \ (-1 < m < 0)$$

$$-1 < x < 1 \ (m \leq -1)$$

$$m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$$

אינפי 2

פרק 15 - קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב

תוכן העניינים

1. קווים ותחומים במישור.....	137
2. קווים ותחומים במישור בהצגה פרמטרית.....	141
3. קווים ותחומים במישור בהצגה קווטבית (פולרית).....	147
4. משטחים במרחב.....	152
5. משטחים במרחב בהצגה פרמטרית	(לא ספר)
6. גופים במרחב.....	154
7. קוואורדינטות גליליות וכדוריות.....	157
8. נספח – משטחים מעלה שנייה.....	161

קוויים ותחומיים במישור

שאלות

1) שרטטו במישור את התחומיים הבאים :

א. $S = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid -1 \leq x^2 \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid x \leq y \leq 4\}$

2) שרטטו במישור את התחומיים הבאים :

א. $S = \{(x, y) \mid x - 1 \leq y \leq 2x + 1\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid |y - 2x| \leq 1\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid |x| + y < 4\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid (x + y)^2 \leq 4, x > 1\}$

3) מצאו את המר策 והרדיזוס של המעגלים הבאים :

א. $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

ב. $x^2 + y^2 - 8y = -15$

ג. $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים חlek מעגל. שרטטו אותו.

א. $y = \sqrt{1 - x^2}$

ב. $y = -\sqrt{1 - x^2}$

ג. $x = \sqrt{1 - y^2}$

ד. $x = -\sqrt{1 - y^2}$

ה. $0 \leq x \leq 1 \quad y = \sqrt{1 - x^2}$

ו. $-\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{3}{5} \quad y = \sqrt{1 - x^2}$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלк ממעגל. שרטטו אותו.

A. $y = 2 + \sqrt{1 - (x-3)^2}$

B. $y = 2 - \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$

C. $x \geq 3.5, \quad x = 4 - \sqrt{1 - y^2}$

6) שרטטו את התחומים הבאים במשורר:

A. $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

B. $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 4\}$

C. $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 4\}$

D. $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 4\}$

E. $S = \{(x, y) | -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

F. $S = \{(x, y) | -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\}$

G. $S = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

H. $S = \{(x, y) | -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\}$

7) שרטטו את התחומים הבאים במשורר:

A. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

B. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$

C. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \geq 0\}$

D. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad y \geq 0\}$

8) שרטטו את התחומים הבאים במשורר:

A. $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 \leq 0\}$

B. $S = \{(x, y) | 0 \leq y + 1 \leq \sqrt{1 - x^2}\}$

9) שרטטו את התחוםים הבאים במישור:

A. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

B. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

C. $S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2} \right\}$

D. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x^2\}$

E. $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$

F. $S = \left\{ (x, y) \mid |x - 1| \leq y \leq \sqrt{1 - (x - 1)^2} \right\}$

10) נתונה המשוואה $25x^2 + 4y^2 - 50x + 16y = 59$.

- A. הוכחו שהמשוואה מוגדרת אליפסה ושרטטו אותה.
- B. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצאי העליון ואת החצאי התחתון של האליפסה.
- C. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצאי הימני ואת החצאי השמאלי של האליפסה.
- D. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתחום האליפסה או עליה?
- E. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתחום האליפסה ומעל לציר המשני שלה?

11) שרטטו את התחוםים הבאים במישור:

A. $S = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 \geq 0\}$

B. $S = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \right\}$

C. $S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{2}y + 1 \leq x \leq \frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2} \right\}$

D. $S = \left\{ (x, y) \mid -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq -x^2 \right\}$

12) שרטטו את התחומים הבאים במישור :

א. $S = \{(x, y) | x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$

ב. $S = \{(x, y) | -2 \leq y \leq -x^2\}$

ג. $S = \{(x, y) | y^2 - 2 \leq x \leq -y^2\}$

ד. $S = \{(x, y) | y^2 \leq x \leq 1 - y\}$

13) שרטטו את התחומים הבאים במישור :

א. $\left\{ (x, y) \middle| \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$

ב. $\left\{ (x, y) \middle| \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, \quad x^2 + y^2 \leq 16 \right\}$

ג. $\left\{ (x, y) \middle| \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, \quad y \geq \frac{1}{4}x^2 \right\}$

ד. $\left\{ (x, y) \middle| \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1, \quad x^2 + y^2 \geq 4 \right\}$

תשובות סופיות

לפתרונות מלאים ושרטוטים היכנסו לאתר GooL.co.il

קוויים ותחומיים במישור בהצגה פרמטרית

שאלות

1) עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $t \geq 0$ $x = t^2 + 1, y = t^2$

ב. $0 \leq t \leq \pi$ $x = \sin t, y = \cos^2 t$

ג. $\pi \leq t \leq 2\pi$ $x = \cos t, y = 4 \sin t$

2) להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.
על ידי חילוץ של הפרמטר t , מצאו משווה מתאימה שmbטאת כל מסלול
באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x = t - 4, y = t^2$

ב. $x = -4 + \cos t, y = 1 + 2 \sin t$

ג. $x = 4 \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$

ד. $x = t(t+1)+1, y = t(0.5t+1)+1$

ה. $x = \frac{20t}{4+t^2}, y = \frac{20-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x = ke^t + ke^{-t}, y = ke^t - ke^{-t}$ (קבוע).

3) נתון המעגל $x^2 + y^2 = 8$.

א. שרטטו את המעגל ומצאו את משוואתו הפרמטרית.

ב. מצאו הצגה פרמטרית של חלק המעגל מהנקודה A(2, 2) لنקודה B(-2, -2).

ג. מצאו הצגה פרמטרית של התחום D, המוגבל מעל הישר AB ומתחת למעגל.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום E, המוגבל בין המעגל הנתון למעגל $x^2 + y^2 = 16$.

4) נתונים שני מעגלים $x^2 + y^2 = 25$ ו- $(y-4)^2 + (x-8)^2 = 25$.

א. שרטטו את המעגלים, מצאו את משוואותיהם הפרמטריות ומצאו הצגה פרמטרית לתוחם הכלוא בכל אחד מהמעגלים.

ב. המעגלים נחתכים בשתי נקודות, A ו- B, ותהי הנקודה A בעלת ערך y הגדול יותר.

מצאו את הצגה הפרמטרית של חלק המעגל בין A לבין B. הפרידו לשני מקרים.

ג. מצאו הצגה אלגברית לתוחם החסום בין שני המעגלים.

5) נתונות משוואות של שתי אליפסות:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$$

א. שרטטו את האליפסות ומצאו את הצוגן הפרמטרית.

ב. האליפסות נחתכות ב-4 נקודות, מצאו אותן.

ג. הקו המחבר את 4 הנקודות לעיל מורכב מ-4 מסילות. מצאו את הצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של התוחם, המוגבל בתוך שתי האליפסות.

6) נתונה היפרbole $4x^2 - y^2 = 4$.

א. ההיפרbole מורכבת משתי מסילות.

מצאו את הצגה האלגברית ואת הצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ב. הציינו באופן פרמטרי את התוחם המוגבל בין היפרbole לבין האסימפטוטות שלה.

7) נתונה המשוואה $3x^2 - y^2 = 3$.

א. איזה קו במישור מתארת המשוואה? שרטטו.

ב. הקו מסעיף אי' מורכב משתי מסילות.

מצאו את הצגה האלגברית ואת הצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ג. המסילה C היא חלק של הקו הנutan מהנקודה $(-3, -2)$ לנקודה $(0, -1)$.

כתבו את C בצורה פרמטרית.

ד. מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- y למסילה C.

8) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$. $0 \leq t \leq 2\pi$

9) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases}$. $-\pi \leq t \leq 2\pi$

תשובות סופיות

$$y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1 . \quad \text{ב.} \quad y = x - 1, x \geq 1 . \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0 . \quad \text{ג.}$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}} . \quad \text{ג.} \quad (x+4)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1 . \quad \text{ב.} \quad y = (x+4)^2 . \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$x^2 - y^2 = 4k^2 . \quad \text{ו.} \quad x^2 + y^2 = 25 . \quad \text{ז.} \quad x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1 . \quad \text{ט.}$$

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{8} \cos t & \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4} \\ y(t) = \sqrt{8} \sin t \end{cases} . \quad \text{ב.} \quad \begin{cases} x(t) = \sqrt{8} \cos t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ y(t) = \sqrt{8} \sin t \end{cases} . \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x(u, v) = \sqrt{8}u \cos v & 0 \leq u \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq v \leq \frac{5\pi}{4} \\ y(u, v) = \sqrt{8}u \sin v \end{cases} . \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} x(u, v) = u \cos v & \sqrt{8} \leq u \leq 4, 0 \leq v \leq 2\pi \\ y(u, v) = u \sin v \end{cases} . \quad \text{ט.}$$

א. המעלג $x^2 + y^2 = 25$: מרכז $(0,0)$. רדיוס : 5.

$$\begin{cases} x(t) = 5 \cos t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ y(t) = 5 \sin t \end{cases} \quad \text{הצגה פרמטרית של המעלג:}$$

$$\cdot \begin{cases} x(u, v) = 5u \cos v & 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi \\ y(u, v) = 5u \sin v \end{cases} \quad \text{הצגה פרמטרית של העיגול:}$$

המעלג $(x-8)^2 + (y-4)^2 = 25$: מרכז $(8,4)$. רדיוס : 5.

$$\cdot \begin{cases} x(t) = 8 + 5 \cos t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ y(t) = 4 + 5 \sin t \end{cases} \quad \text{הצגה פרמטרית של המעלג:}$$

$$\cdot \begin{cases} x(u, v) = 8 + 5u \cos v & 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi \\ y(u, v) = 4 + 5u \sin v \end{cases} \quad \text{הצגה פרמטרית של העיגול:}$$

$$\text{ב. מקרה 1: } \begin{cases} x(t) = 5 \cos t \\ y(t) = 5 \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\text{מקרה 2: } \begin{cases} x = 8 + 5 \cos t \\ y = 4 + 5 \sin t \end{cases}, \pi \leq t \leq \arctan\left(\frac{4}{3}\right) + \pi$$

$$\{(x, y) | -\sqrt{25 - (y-4)^2} + 8 \leq x \leq \sqrt{25 - (y-4)^2} + 8\} . \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos t, y(t) = \sqrt{2} \sin t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ x(t) = \sqrt{2} \cos t, y(t) = 2 \sin t & 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases} . \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), B\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right), D\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) . \quad \text{ב.}$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{cases} \quad \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq t \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad : DA$$

ג. המסלילה

$$\cdot \begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{cases} \quad \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \leq t \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \quad : BC$$

המסלול

$$\cdot \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = \sqrt{2} \sin t \end{cases} \quad \arctan\left(\sqrt{2}\right) \leq t \leq \arctan\left(-\sqrt{2}\right) + \pi \quad : AB$$

המסלול

$$\cdot \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = \sqrt{2} \sin t \end{cases} \quad \arctan\left(\sqrt{2}\right) + \pi \leq t \leq \arctan\left(-\sqrt{2}\right) + 2\pi \quad : CD$$

המסלול

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$$

$$D_1: \begin{cases} x(u, v) = \sqrt{2}\mathbf{u} \cos v \\ y(u, v) = 2\mathbf{u} \sin v \end{cases}$$

$$0 \leq \mathbf{u} \leq 1, \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq v \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$D_3: \begin{cases} x(u, v) = \sqrt{2}\mathbf{u} \cos v \\ y(u, v) = 2\mathbf{u} \sin v \end{cases}$$

$$0 \leq \mathbf{u} \leq 1, \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \leq v \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi$$

$$D_2: \begin{cases} x(u, v) = 2\mathbf{u} \cos v \\ y(u, v) = \sqrt{2}\mathbf{u} \sin v \end{cases}$$

$$0 \leq \mathbf{u} \leq 1, \arctan\left(\sqrt{2}\right) \leq v \leq \arctan\left(-\sqrt{2}\right) + \pi$$

$$D_4: \begin{cases} x(u, v) = 2\mathbf{u} \cos v \\ y(u, v) = \sqrt{2}\mathbf{u} \sin v \end{cases}$$

$$0 \leq \mathbf{u} \leq 1, \arctan\left(\sqrt{2}\right) + \pi \leq v \leq \arctan\left(-\sqrt{2}\right) + 2\pi$$

. 7

6) א. אלגברית: ימנית שמאלית $x = -\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}$, $x = \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}$

פרמטרית: ימנית, שמאלית $\begin{cases} x = \cosh t \\ y = 2 \sinh t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$$D = D_1 \cup D_2$$

$D_1 : \begin{cases} x(u, v) = u \cosh v \\ y(u, v) = 2u \sinh v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, v \in \mathbb{R}$

$D_2 : \begin{cases} x(u, v) = -u \cosh v \\ y(u, v) = 2u \sinh v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, v \in \mathbb{R}$

. $x = -\sqrt{1 + \frac{y^2}{3}}$, $x = \sqrt{1 + \frac{y^2}{3}}$ א. הiperבולת. ב. אלגברית: ימנית שמאלית

פרמטרית: ענף ימני וענף שמאלי $\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sqrt{3} \sinh t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

1. ט $C : \begin{cases} x = -\cosh t \\ y = \sqrt{3} \sinh t \end{cases} \quad \ln(2 - \sqrt{3}) \leq t \leq 0$

8 (8)

 $6\pi\sqrt{29}$ (9)

קוויים ותחומים במישור בהצגה קוטבית (פולרית)

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.
- ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(-1, -1)$ לנקודה קוטבית.

2) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(10, -\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.
- ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(-4, 0)$ לנקודה קוטבית.
- ג. המירו את הנקודה הקרטזית $(2, 2)$ לנקודה קוטבית.

3) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. המירו את המשוואה $x^2 - 4x - xy = 1$ לקואורדינטות קוטביות.
- ב. המירו את המשוואה $\theta = -4 \cos \theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

4) ענו על הסעיפים הבאים :

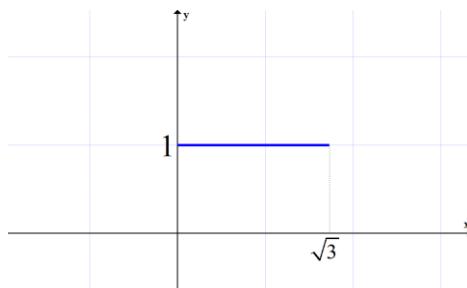
- א. המירו את המשוואה $y^2 + x^2 = 4y$ לקואורדינטות פולריות.
- ב. המירו את המשוואה $10 = x$ לקואורדינטות פולריות.
- ג. המירו את המשוואה $4 = y$ לקואורדינטות פולריות.

5) ענו על הסעיפים הבאים :

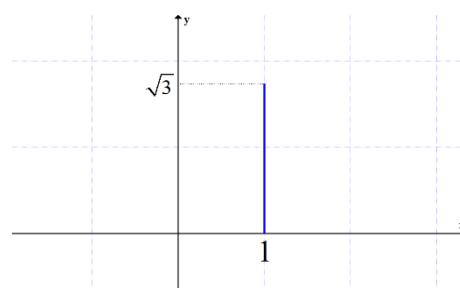
- א. המירו את המשוואה $r = 4$ לקואורדינטות קרטזיות.
- ב. המירו את המשוואה $\theta = 4/\pi$ לקואורדינטות קרטזיות.
- ג. המירו את המשוואה $r = 2\cos\theta + 4\sin\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.
- ד. המירו את המשוואה $6r^3 \sin\theta = 4 - \cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

6) להלן שני איורים, שיכל אחד מהם קו.
כתבו כל אחד מהקוים בהצגה פולרית.

איור ב



איור א



7) בכל אחד מהסעיפים הבאים שכל אחד מהקוים מຕאר חלק מעגל.
כתבו אותו בהצגה פולרית.

א. $y = \sqrt{1-x^2}$

ב. $y = -\sqrt{1-x^2}$

ג. $x = \sqrt{1-y^2}$

ד. $x = -\sqrt{1-y^2}$

ה. $y = \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1$

ו. $y = \sqrt{1-x^2}, -\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{3}{5}$

8) בסעיפים א-ג הוכחו שככל אחד מהקוים מຕאר חלק מעגל.
שרטטו את הקו והציגו אותו בצורה פולרית (קוטבית).

א. $y = \sqrt{4-(x-2)^2}$

ב. $x = -\sqrt{6y-y^2}$

ג. $y = -1 + \sqrt{1-x^2}$

ד. סגרו את הקו מסעיף ג' על ידי ישר מותאים.
מהי הצגתו הפולרית של ישר זה?

9) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ג. $S = \{(x, y) | -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\}$

10) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית :

א. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

11) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית :

א. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

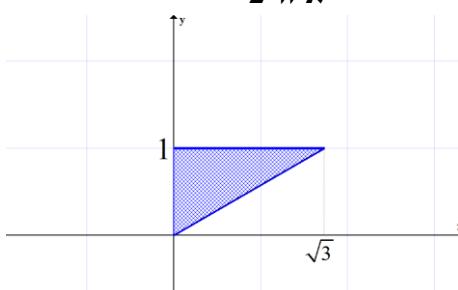
ב. $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

12) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית :
 $. S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2} \right\}$

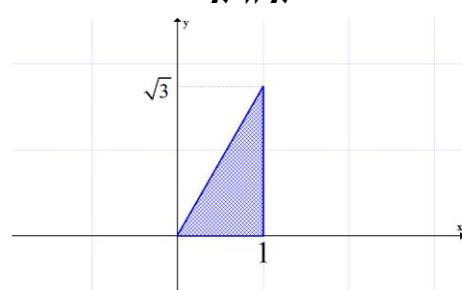
13) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית :
 $. S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq \sqrt{8x - x^2} \right\}$

14) להלן שני איורים, ובכל איור תחום.
 כתבו כל אחד מתחוםים אלה בהצגה פולרית ותארו במלילים כל אחד מתחומיהם.

איור ב



איור א



תשובות סופיות

$$(r, \theta) = \left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} \right) \text{ ב. } (x, y) = (2, 2\sqrt{3}) \text{ נ. } \text{ (1)}$$

$$(r, \theta) = \left(\sqrt{8}, \frac{3\pi}{4} \right) \text{ ג. } (r, \theta) = \left(4, \frac{3\pi}{2} \right) \text{ ב. } (x, y) = (5, -5\sqrt{3}) \text{ נ. } \text{ (2)}$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 2^2 \text{ ב. } 4r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta = 1 + r \cos \theta \cdot r \sin \theta \text{ נ. } \text{ (3)}$$

$$r \sin \theta = 4 \text{ ג. } r \cos \theta = 10 \text{ ב. } r = 4 \sin \theta \text{ נ. } \text{ (4)}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \text{ ג. } y = x \text{ ב. } x^2 + y^2 = 4^2 \text{ נ. } \text{ (5)}$$

$$6 \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^3 \cdot y = 4 \sqrt{x^2 + y^2} - x \text{ ט}$$

$$r = \frac{1}{\sin \theta} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ ב. } \quad r = \frac{1}{\cos \theta} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \text{ נ. } \text{ (6)}$$

$$\begin{cases} r = 1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ ג.} \quad \begin{cases} r = 1 \\ \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ ב.} \quad \begin{cases} r = 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ נ. } \text{ (7)}$$

$$\begin{cases} r = 1 \\ \arctan \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left(-\frac{4}{3} \right) + \pi \end{cases} \text{ ג.} \quad \begin{cases} r = 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ ה.} \quad \begin{cases} r = 1 \\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \text{ ט}$$

$$r = 6 \sin \theta, \quad 0.5\pi \leq \theta \leq \pi \text{ ב.} \quad r = 4 \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \text{ נ. } \text{ (8)}$$

$$r = -\frac{1}{\sin \theta}, \quad 1.25\pi \leq \theta \leq 1.75\pi \text{ ט.} \quad \begin{cases} r = -2 \sin \theta \\ \pi \leq \theta \leq 1.25\pi \text{ or } 1.75\pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ ג.}$$

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0.5\pi \leq \theta \leq 1.5\pi \end{cases} \text{ ג.} \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ ב.} \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ נ. } \text{ (9)}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \text{ ג.} \quad \text{or} \quad \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \text{ ב.} \quad \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ נ. (10)}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 1.5\pi \leq \theta \leq 2.5\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ ט}$$

$$0 \leq r \leq 2, \quad 0.25\pi \leq \theta \leq 1.25\pi \text{ ב.} \quad \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0.25\pi \leq \theta \leq \arctan 2 \end{cases} \text{ נ. (11)}$$

$$\frac{25}{7 \sin \theta - \cos \theta} \leq r \leq 5 \quad \text{arctan} \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left(-\frac{3}{4} \right) + \pi \text{ (12)}$$

$$0 \leq r \leq 8 \cos \theta, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (13)$$

$$0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \theta}, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (14) \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

משטחים במרחב

שאלות

זהו וشرطו את המשטחים בשאלות 1-3 :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad (1)$$

$$z = 5x^2 + 1.25y^2 \quad (2)$$

$$20x^2 + 45y^2 = 180 + 36z^2 \quad (3)$$

4) זהו וشرطו את המשטחים הבאים :

א. $z = 4x^2 + y^2 + 1$

ב. $z = 3 - x^2 - y^2$

5) זהו כל אחד מהמשטחים הבאים :

א. $25x^2 + 100y^2 + 4z^2 = 100$

ב. $25x^2 + 4y^2 - 50x - 16y - 100z + 41 = 0$

ג. $x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 80z - 404 = 0$

6) מצאו את החיתוך בין המשטח $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ לבין המשטח $z = 12$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

7) נתון המשטח $0 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x - 4y + 40z + 206$.
א. זהו את המשטח.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של המשטח עם הישר $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+14}{2}$.

8) מצאו את החיתוך בין המשטחים $x^2 + y^2 + z^2 = 64$ ו- $x^2 + y^2 + (z-10)^2 = 24$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

9) נתון המשטח $36z^2 + 4x^2 - 9y^2 = 36$.
א. זהו את המשטח וشرطו אותו.

ב. רשמו הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור,
ושנמצאים כולם על המשטח.

- 10) נתונים שני משטחים: $R: x^2 - y^2 + 2z^2 = 3$, $Q: 2x^2 - y^2 + z^2 = 3$.
- זהו את המשטחים וشرطו אותם.
 - הראו כי החיתוך בין R ו- Q הוא שתי מסילות, כל אחת נמצאת במישור, וכתבו את משוואת המישורים הללו.
 - המסילה C היא חלק של החיתוך בין R ל- Q . נתון כי $A(-2, -3, 2)$ היא נקודת התחלה של C ו- $B(-1, 0, 1)$ היא נקודת סיום של C . כתבו את C בצורה פרמטרית.
 - מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- y למסילה C .
- בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.

תשובות סופיות

- אליפסואיד.
 - פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.
 - היפרבולואיד חד-יריעתי.
 - פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 1)$ ונפתח כלפי מעלה.
 - פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 3)$ ונפתח כלפי מטה.
 - אליפסואיד.
 - פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(1, 2, 0)$ ונפתח כלפי מעלה.
 - היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 10)$.
 - הчитוך הוא מעגל $x^2 + y^2 = 25$, שמרכזו בנקודה $(0, 0, 12)$.
 - ספרה שמרכזה $(4, 1, -10)$ ורדיוסה $\sqrt{14}$.
 - נקודות החיתוך הן $A(7, 0, -12)$, $B\left(\frac{59}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{112}{9}\right)$.
 - הчитוך הוא המעגל $x^2 + y^2 = 15$, שמרכזו בנקודה $(0, 0, 7)$.
 - היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה- y .
 - $\ell_1: (x, y, z) = (3t, 2t, 1)$ $\ell_2: (x, y, z) = (3, 2t, t)$
 - שני המשטחים הם היפרבולואיד חד-יריעתי.
- ד. $\sqrt{2}$. $C: x = -\cosh t$, $y = \sqrt{3} \sinh t$, $z = \cosh t$ $\ln(2 - \sqrt{3}) \leq t \leq 0$.

גופים במרחב **שאלות**

1) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

ב. $V = \{(x, y, z) | -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$

ד. $V = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ה. $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0\}$

ו. $V = \{(x, y, z) | -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq 0\}$

ז. $V = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}$

2) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

ב. $V = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $D = \{(x, y, z) | 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

ד. $D = \{(x, y, z) | 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, z \geq 0, 0 \leq y \leq x\}$

ה. $V = \{(x, y, z) | 1 \leq z \leq 1 + \sqrt{1-x^2-y^2}\}$

ו. $V = \left\{ (x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2} \right\}$

3) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{3(x^2 + y^2)}\}$

ב. $V = \{(x, y, z) | \sqrt{3(x^2 + y^2)} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ד. $V = \{(x, y, z) | 0 \leq y \leq 3, x \geq 0, z \geq 0, x^2 + z^2 \leq 4\}$

ו. $V = \left\{ (x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1 \right\}$

4) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במיללים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$

ב. $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$

ד. $V = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

5) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במיללים את הגוף שהתקבל.

א. $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ב. $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ג. $V = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

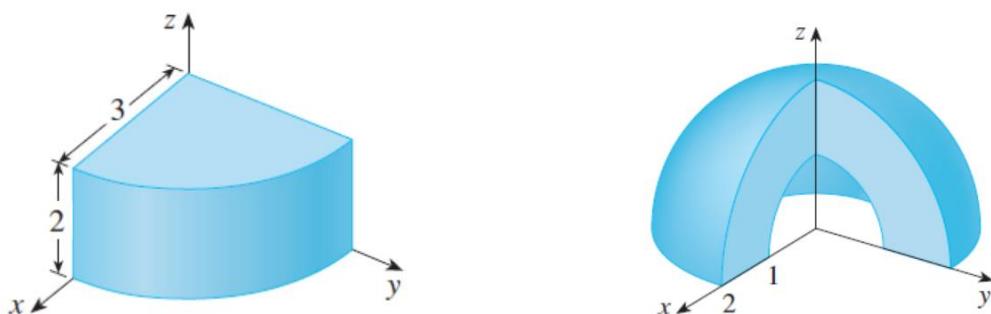
ד. $V = \{(x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ה. $U = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 10 - y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים אירור של גוף V במרחב.

תארו במיללים את הגוף וכתבו אותו לפי התבנית {} |

א. ב.



7) נתונים המשטחים $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ו- $z = x^2 + y^2$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים שם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים.

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

8) נתונים שני משטחים : $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ו- $z = x^2 + y^2 + z^2$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים וכותבו אותו בתבנית

$$V = \{(x, y, z) \mid ? \leq z \leq ??\}$$

ג. מצאו את משווה עקום החיתוך בין המשטחים.

9) תחומיים תלת-ממדיים M ו- N נתונים על ידי

$$M : x^2 - y^2 + 2z^2 \leq 3$$

$$N : 2x^2 - y^2 + z^2 \leq 3$$

תחום תלת-ממדי W הוא החיתוך בין M ל- N .

שרטו את D , החיתוך של W עם המישור $1 = y$ (במערכת צירים zx),

וכתבו את D בהצגה פרמטרית.

[לפתרונות מלאים ראו את הסרטיונים באתר GooL.co.il](http://GooL.co.il)

קואורדינטות גליליות וכדוריות

שאלות

- 1)** בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משווהה של משטח במערכת קרטזית.
מצאו את המשווהה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית.
מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

- א. $z = 3$
 ב. $z = 4x^2 + 4y^2$
 ג. $x^2 + y^2 = 4$

- 2)** בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משווהה של משטח במערכת קרטזית.
מצאו את המשווהה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית.
מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

- א. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
 ב. $2x + 3y + 4z = 1$
 ג. $x^2 = 16 - z^2$
 ד. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

- 3)** בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משווהה של משטח במערכת גלילית.
הציגו את המשווהה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? ציירו את המשטח.

- א. $r = 3$
 ב. $z = r^2$
 ג. $z = r$
 ד. $\theta = \frac{\pi}{4}$
 ה. $r = 4 \sin \theta$
 ו. $r^2 \cos 2\theta = z$

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משווה של משטח במערכת צדוריית.
הציגו את המשווה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח?

א. $r = 3$

ב. $\theta = \frac{\pi}{3}$

ג. $\phi = \frac{\pi}{4}$

ד. $r = 2 \sec \phi$

ה. $r = 4 \cos \phi$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משווה של משטח במערכת צדוריית.
הציגו את המשווה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $r \sin \phi = 1$

ב. $r \sin \phi = 2 \cos \theta$

ג. $r - 2 \sin \phi \cos \theta = 0$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2 \right\} \text{ א.}$$

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{6 - x^2 - y^2} \right\} \text{ ב.}$$

7) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2 \right\} \text{ א.}$$

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \right\} \text{ ב.}$$

8) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1 \right\} \text{ א.}$$

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1 \right\} \text{ ב.}$$

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1 \right\} \text{ ג.}$$

$$U = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 10 - y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \right\} \text{ ד.}$$

תשובות סופיות

1) א. מערכת גלילית: $z = r \cos \phi$. מערכת כדורית: $r = \frac{3}{\cos \phi}$. שם המשטח: מישור.

ב. מערכת גלילית: $z = 4r^2$. מערכת כדורית: $r = \frac{\cos \phi}{4 \sin^2 \phi}$.
שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת גלילית: $r = 2$. מערכת כדורית: $r = \frac{2}{\sin \phi}$. שם המשטח: גליל.

2) א. מערכת גלילית: $r^2 + z^2 = 9$. מערכת כדורית: $r = 3$. שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת גלילית: $r(2 \cos \theta + 3 \sin \theta) + 4z = 1$.

מערכת כדורית: $r(2 \cos \theta \sin \phi + 3 \sin \theta \sin \phi + 4 \cos \phi) = 1$.
שם המשטח: מישור.

ג. מערכת גלילית: $r^2(1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi) = 16$. מערכת כדורית: $r^2 \cos^2 \theta + z^2 = 16$.
שם המשטח: גליל.

ד. מערכת גלילית: $r = z$. מערכת כדורית: $\phi = \frac{\pi}{4}$. שם המשטח: חרוט.

3) א. מערכת קרטזית: $x^2 + y^2 = 9$. שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית: $z = x^2 + y^2$. שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת קרטזית: $\sqrt{x^2 + y^2} = z$. שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית: $x = y$. שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית: $x^2 + (y-2)^2 = 4$. שם המשטח: גליל.

ו. מערכת קרטזית: $z = x^2 - y^2$. שם המשטח: פרבולואיד היפרבולי.

4) א. מערכת קרטזית: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת קרטזית: $y = \sqrt{3}x$. שם המשטח: מישור.

ג. מערכת קרטזית: $\sqrt{x^2 + y^2} = z$. שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית: $z = 2$. שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית: $(z-2)^2 = 4(x^2 + y^2)$.

שם המשטח: ספירה שמרכזה בנקודה $(0, 0, 2)$ ורדיוסה 2.

5) א. מערכת קרטזית: $x^2 + y^2 = 1$. שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית: $(x-1)^2 + y^2 = 1$. שם המשטח: גליל.

ג. מערכת קרטזית: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$. שם המשטח: ספירה.

6) א. $V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq 2 - r^2\}$

ב. $V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) | 0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 \leq z \leq \sqrt{6 - r^2}\}$

$$V_{r\theta z} = \left\{ (r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{0.5}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 \leq z \leq 1 - r^2 \right\} . \text{א} \quad (7)$$

$$V_{r\theta z} = \left\{ (r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 2\cos\theta, -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi, 0 \leq z \leq 4 - r^2 \right\} . \text{ב}$$

$$V_{r\theta z} = \left\{ (r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\sqrt{4 - r^2} \leq z \leq \sqrt{4 - r^2} \right\} . \text{א} \quad (8)$$

$$V_{r\theta z} = \left\{ (r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2} \right\} . \text{ב}$$

$$V_{r\theta z} = \left\{ (r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq \sqrt{4 - r^2} \right\} . \text{ג}$$

$$V_{r\theta z} = \left\{ (r, \theta, z) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 10 - r \sin\theta \right\} . \text{ד}$$

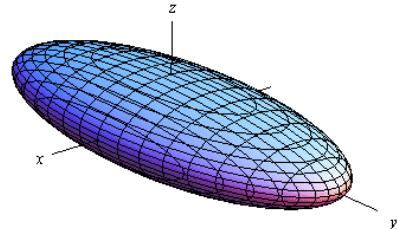
נספח – משטחים ממעלת שנייה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

משוואה :

תיאור : החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות;
כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a = b = c$. אם נקבל בדור עם רדיוס a והחתכים הניל הם מעגלים.

אליפסואיד

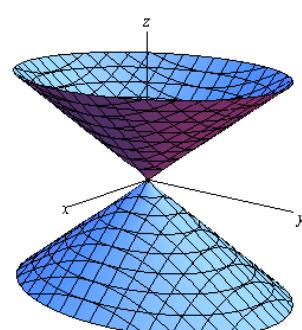


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

משוואה :

תיאור : החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית);
החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות.
החתכים במישור zx ו- zy הם זוג ישרים הנחתכים
בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו
הם היפרבולות.
* מרכז החגורות הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע
לבד באחד האגפים.

חרוט אליפטי

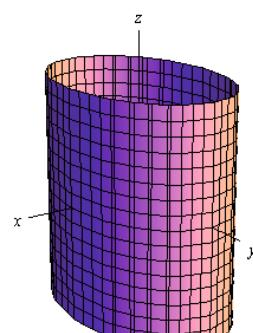


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

משוואה :

תיאור : החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים
במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור zx ו-
 zy הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים
מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא
 $r^2 = x^2 + y^2$, החתכים הניל הם מעגלים.
* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע
במשוואת הגליל.

גליל אליפטי



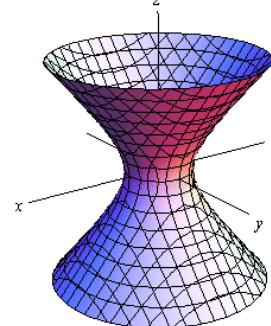
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

משוואה :

תיאור : החתק במשור xy הוא אליפסה ; כך הם החתכים במישורים מקבילים למשור xy . החתכים במשור zx ו- zy הם היפרבולות ; כך גם החתכים במישורים מקבילים למישוריים אלו.

* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים לשטנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד חד-יריעתי



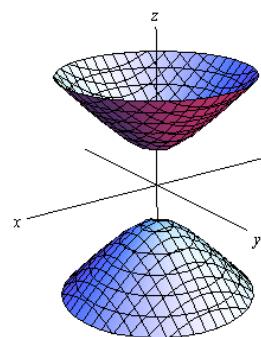
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

משוואה :

תיאור : לשטח זה אין חתק במשור xy ; החתכים במישורים מקבילים למשור xy , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במשור zx ו- zy הם היפרבולות ; כך גם החתכים במישורים מקבילים למשוריים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים לשטנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

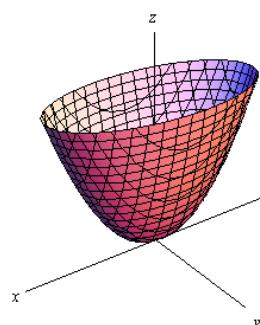
משוואה :

תיאור : החתק במשור xy הוא נקודה (הראשית) ; החתכים במישורים מקבילים למשור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במשור zx ו- zy הם פרבולות ; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למשוריים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים לשטנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

פרבולואיד אליפטי



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים

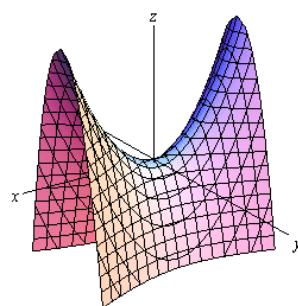
בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר $-y$ ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר $-x$.

החתכים במישור zx ו- zy הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

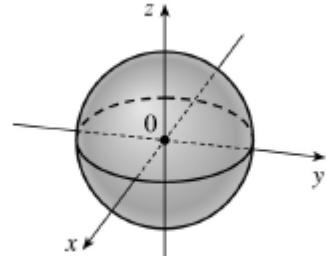
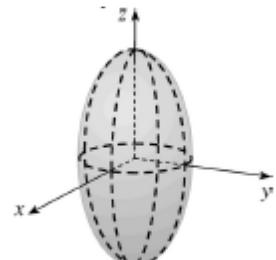
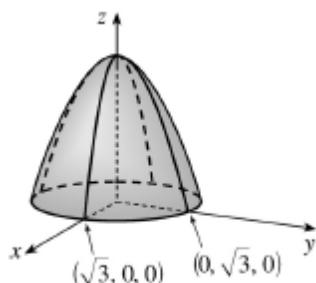
* מרכזו הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים לשנתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפימטה.

פרבולואיד היפרבולי



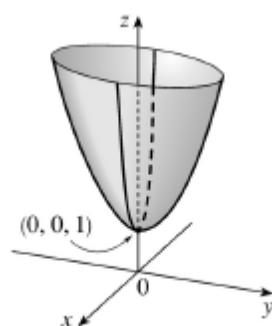
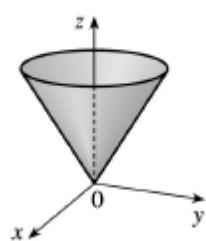
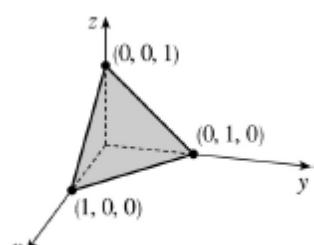
דוגמאות שונות



$$z = 3 - x^2 - y^2$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

אינפי 2

פרק 16 - פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה

תוכן העניינים

1. קווי גובה לפונקציה של שני משתנים.....	164
2. משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים.....	166
3. מבוא לפונקציה של שני משתנים.....	167
4. נספח – משטחים ממולה שנייה.....	169

קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-6, מצאו תחום הגדרה, שרטטו אותו, ושרטטו את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה:

$$f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 7-10 שרטטו מפת קווי גובה:

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y+3)^2 \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x-y} \quad (8)$$

$$f(x, y) = 2 \ln x + \ln y \quad (9)$$

$$f(x, y) = \min\{3x, y\} \quad (10)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 11-13, שרטטו את קו הגובה k :

$$(k = 0, 4) \quad f(x, y) = (x-y)^2 \quad (11)$$

$$(k = 0, 2) \quad f(x, y) = \min\{y-x^2, x+y\} \quad (12)$$

$$(k = 1) \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3x - y - 3 & x^2 \geq y \\ -x^2 + 3x + y - 3 & x^2 < y \end{cases} \quad (13)$$

14) נתונה הפונקציה $f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & x \leq 1 \\ 2x + y & x > 1 \end{cases}$

- شرطטו את קו הגובה $f(x, y) = 0$.
- לאילו ערכי C קו הגובה $f(x, y) = C$ הוא קו רציף?
ציררו את קו הגובה במקרה זה.

הערות

- * בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשפטים הנפוצים.
- ** קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שותות ערך.

תשובות סופיות

(1) $x \neq 0$, המישור ללא ציר ה- y .

(2) $x > 0, y > 0$, הרביע הראשון ללא הצירים.

(3) כל המישור.

(4) $x^2 + y^2 \leq 1$, עיגול היחידה.

(5) $y < x^2$

(6) $y \geq 0$, חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים וشرطוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר: GooL.co.il

משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים

שאלות

1) נתונה הפונקציה $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.
מצאו את משטח הרמה 2 של הפונקציה וشرطו אותו.

2) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = z + x^2 + y^2$.
מצאו את משטח הרמה 4 של הפונקציה וشرطו אותו.

3) עברו כל אחת מהfonקציות הבאות למצאו את משטחי הרמה:

A. $f(x, y, z) = 4^{x+y-z}$
 B. $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$

4) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + z^2}$.
מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

5) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = z^2 - y^2 - x^2$.
מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

תשובות סופיות

- 1) חצי ספירה עליונה שמרכזה בנקודה $(0, 0, -2)$ ורדיווסה 2.
- 2) פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 4)$ ונפתח כלפי מטה.
- 3)
 - A. מישוריים.
 - ב. משטח רמה k הוא פרבולואיד אליפטי, שמרכזו בנקודה $(0, 0, k)$ ונפתח כלפי מעלה.
- 4) עברו $0 < k$ לא קיים משטח רמה k .
 עברו $0 = k$ נקודה $(0, 0, 0)$. עברו $k = 1$ מישוריים.
 עברו $1 > k$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- y .
 עברו $1 < k < 0$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- z .
- 5) עברו $0 < k$ היפרבולואיד חד-יריעתי. עברו $0 = k$ חרוט אליפטי.
 עברו $0 < k$ היפרבולואיד דו-יריעתי.

מבוא לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

- מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.
- شرطו סקיצה של הקבוצה D .

$$f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2} + \ln(4y - x^2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y^2 + 1} + \frac{x + y}{x - y} \quad (3)$$

$$g(x, y) = \sqrt{x + 4y} + \sqrt{x - 4y} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+4y}} + \frac{1}{\sqrt{x-4y}} \quad (5)$$

$$h(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y + 4}} \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy} \sqrt{\ln \frac{4}{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}} \quad (7)$$

$$z(x, y) = \frac{4}{\sqrt{1 - |x| - |y|}} \quad (8)$$

$$z(x, y) = \ln \left(\frac{x - 4y}{x + 4y} \right) \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln [x \ln(y - 4x)] \quad (10)$$

$$(u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \frac{1}{\sqrt{z}}) \quad (11)$$

$$(f(x, y) = \tan \frac{y}{x}) \quad (12)$$

$$(f(x, y) = \frac{\arcsin\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2\right)}{\ln(x^2 + y^2 - 1)}) \quad (13)$$

תשובות סופיות

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x^2 \leq y \leq \sqrt{5-x^2} \right\} \quad (1)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4, x > 0 \right\} \quad (2)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1, y \neq x \right\} \quad (3)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x \leq y \leq \frac{1}{4}x \right\} \quad (4)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (5)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -4 \leq y \leq x^2 - 4, x \geq 0 \right\} \quad (6)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 4 \right\} \quad (7)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid |x| + |y| < 1 \right\} \quad (8)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x < y < -\frac{1}{4}x \text{ or } -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (9)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid [x < 0 \text{ and } 4x < y < 4x + 1] \text{ or } [x > 0 \text{ and } y > 4x + 1] \right\} \quad (10)$$

$$D = \left\{ (x, y, z) \mid x > -4, y > 1, z > 0 \right\} \quad (11)$$

$$D = \left\{ (x, y) \in R^2 \mid x \neq 0, y \neq \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (12)$$

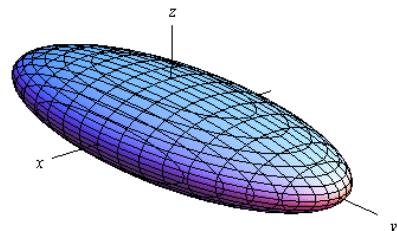
$$D = \left\{ (x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \neq 2 < 4 \right\} \quad (13)$$

נספח – משטחים ממעלה שנייה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

משמעות: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות;
תיאור: החתכים במישורים מקבילים מישור xy הם אליפסות;
נקלוב פדוֹר עם רדיוס a והחתכים הנילם הם מעגלים.

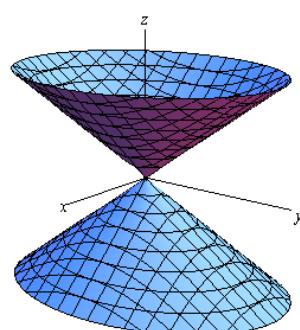
אליפסואיד



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

משמעות: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית);
תיאור: החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות.
חומר אלייפטי: החתכים במישור zx ו- zy הם זוג ישרים החתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות.
* מרכז החגורות הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע בלבד באחד האגפים.

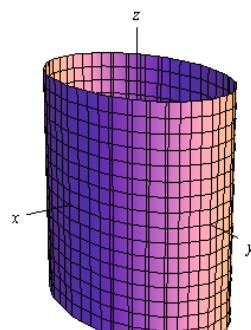
חרוט אלייפטי



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

משמעות: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור zx ו- zy הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $r^2 = x^2 + y^2$, החתכים הנילם הם מעגלים.
* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

גליל אלייפטי

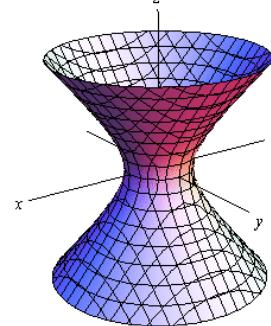


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור zx ו- zy הם היפרבולות; כך גם החתכים במישורים מקבילים למישוריים אלו.

* מרכז היפרבולoid חד-יריעתי הוא על הציר המתאים לשטנה שלפניו המינוס.

היפרבולoid חד-יריעתי

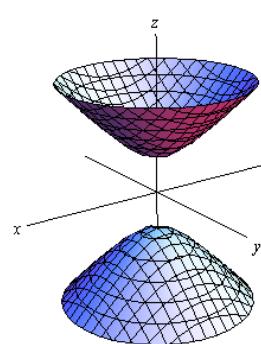


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור zx ו- zy הם היפרבולות; כך גם החתכים במישורים מקבילים למישוריים אלו.

* מרכז היפרבולoid דו-יריעתי הוא על הציר המתאים לשטנה שלפניו המינוס.

היפרבולoid דו-יריעתי



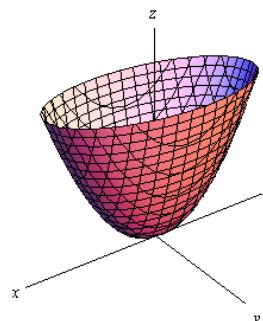
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור zx ו- zy הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישוריים אלו.

* מרכז הפרבולoid האליפטי הוא על הציר המתאים לשטנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולoid נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולoid נפתח כלפימטה.

פרבולואיד אליפטי



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים

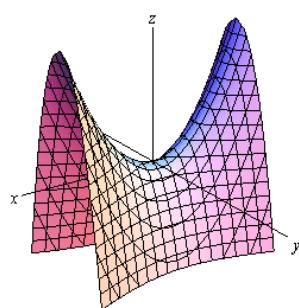
בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר $-y$ ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר $-x$.

החתכים במישור zx ו- zy הם פרבולות; כך גם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

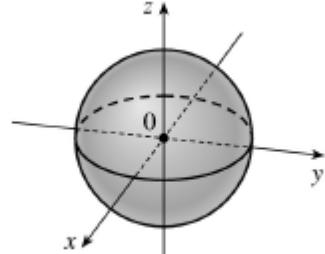
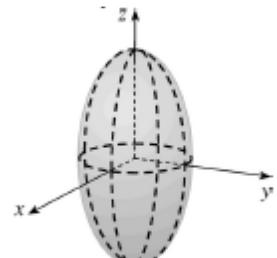
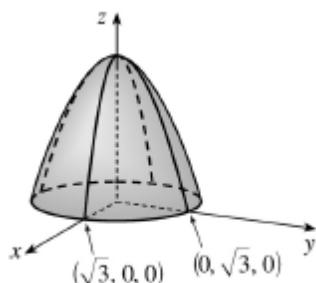
* מרכזו הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפימטה.

פרבולואיד היפרבולי



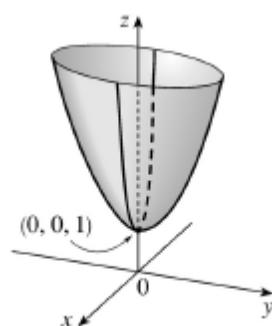
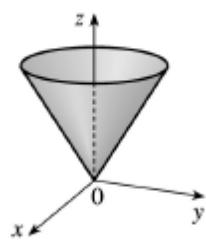
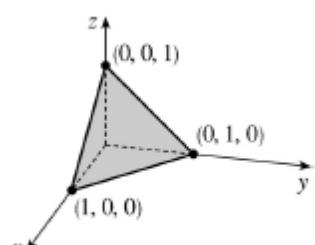
דוגמאות שונות



$$z = 3 - x^2 - y^2$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

איןפי 2

פרק 17 - גבולות וריציפות של פונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. גבול של פונקציה של שני משתנים	172
2. ריציפות של פונקציה של שני משתנים.....	175
3. נוסחאות – גבולות.....	178

גבול של פונקציה של שני משתנים

שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-9:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3y)}{x^3y} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{\sin(xy-6)}{x^2y^2-36} \quad (2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\arctan(x+y-3)}{\ln(x+y-2)} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0^+)} (x^2+y) \ln(x^2+y) \quad (4)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1^+,1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x+2y-3})}{x+2y-3} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sqrt{2x+y-3}-1}{2x+y-4} \quad (6)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \quad (7)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2+z^2))}{xy^2} \quad (8)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} \quad (9)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 17-10 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y|^x \quad (11)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^2} \quad (10)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y} \quad (13)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} \quad (12)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2} \quad (15)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad (14)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4} \quad (17)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad (16)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 25-18 :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x-y}{x^2 + yx + y^4} \quad (19)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \quad (18)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \quad (21)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (20)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2 y - 5y^4}{x^2 + 4y^2} \quad (23)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - x^2 y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \quad (22)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (25)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2) \quad (24)$$

* בשאלות 18, 20 ו-23-25 מומלץ לנסות לפתרור בשתי דרכי שונות.

(26) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^3 + y^2}$

ב. היעזרו בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, וחשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 + y^2}$

ג. היעזרו בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$, וחשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^3 y} - 1}{x^3 + y^2}$

ד. היעזרו בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$, וחשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x^3 y + 1)}{x^3 + y^2}$

* קחו בחשבון שיתכן שהגבול הידוע לא יינתן בוגר השאלה.

. 27) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (\sin x + \cos y) = 1$

. 28) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} x^2 y = 4$

. 29) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 4}} 2x^2 y = 8$

תשובות סופיות

1 (1)

 $\frac{1}{12}$ (2)

1 (3)

0 (4)

5) אין סוף.

 $\frac{1}{2}$ (6)

2 (7)

5 (8)

0 (9)

17 – 20) אין לפונקציה גבול.

0 (18)

0 (19)

0 (20)

0 (21)

3 (22)

0 (23)

0 (24)

0 (25)

0 א-ד. (26)

27) שאלת הוכחה.

28) שאלת הוכחה.

29) שאלת הוכחה.

רציפות של פונקציה של שני משתנים

שאלות

בשאלהות 1-3 בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(0,0)$.
במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה,
האם ניתן להגדיר אותה כך שתיה רציפה בנקודה?

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^3+y} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (3)$$

בשאלהות 4-5 בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(1,4)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)^2}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x,y) \neq (1,4) \\ 0 & (x,y) = (1,4) \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x,y) \neq (1,4) \\ 0 & (x,y) = (1,4) \end{cases} \quad (5)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + 5y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (6)$$

עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?

7) נתונה פונקציה ממשית רציפה $f(x) = f$, שאינה פונקציה קבועה,

$$\cdot g(x,y) \begin{cases} f\left(\frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 5y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ונגידר פונקציה חדשה

האם הפונקציה g רציפה בנקודה $(0,0)$?

8) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה :

$$\text{אם } \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = f(0,y) \text{ לכל } y,$$

$$\text{וגם } \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) = f(x,0) \text{ לכל } x,$$

$$\text{אז } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x,y) = f(0,0)$$

9) פונקציה $f(x,y)$ מקיימת $|f(x,y)| \leq \sin^2(x^4 + y^4)$ לכל (x,y) .

הוכיחו שהפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

10) מה צריך להיות הערך של הקבוע k (אם בכלל), על מנת שהפונקציה

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ k & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

11) נתון כי :

לכל x מתקיים $|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leq y_2 - y_1$ (תנאי לפישץ לפי המשתנה y).

לכל y מתקיים $|f(x_2,y) - f(x_1,y)| \leq x_2 - x_1$ (תנאי לפישץ לפי המשתנה x).

הוכיחו כי $f(x,y)$ רציפה בכל המישור.

12) הוכיחו או הפריכו :

נתון כי $f(x,y)$ רציפה בכל המישור.

$$\cdot z(x,y) = \frac{f(x,y)}{\sqrt{(x-y)^2 - 100}}$$

ונגידר פונקציה חדשה

$$\text{ידעו כי } 0 < z(1,14) < 0, \quad z(14,1) > 0.$$

או בתחום ההגדרה של z קיימת נקודת (c_1, c_2) כך ש- $z(c_1, c_2) = 0$

תשובות סופיות

- (1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר $f(0,0) = 1$, הפונקציה תהיה רציפה.
- (2) הפונקציה רציפה.
- (3) הפונקציה אינה רציפה. אין לה בכלל גבול.
- (4) הפונקציה רציפה.
- (5) הפונקציה לא רציפה. אין לה בכלל גבול.
- (6) עבור $1 > m$ הפונקציה רציפה, ועבור $1 \leq m$ הפונקציה לא רציפה.
- (7) הפונקציה לא רציפה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) $k = 0$
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.

נוסחאות – גבולות

$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$
$y = \arctan x$	$\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\arctan(0) = 0$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$
$y = \sin x$	---	$\sin 0 = 0$
$y = \cos x$	---	$\cos 0 = 1$
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1
$y = \frac{\tan x}{x}$	---	1
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	e	(from right) 1
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	e
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$
		$\sqrt{\infty} = \infty$
		$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm \infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm \infty$$

Undefined Limits :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

איןפי 2

פרק 18 - נזרות חלקיות דיפרנציאביליות

תוכן העניינים

179	1. נזרות חלקיות מסדר ראשון
181	2. נזרות חלקיות מסדר שני
185	3. נזרות חלקיות לפי הגדרה.
187	4. דיפרנציאביליות

נגזרות חלקיות מסדר ראשון

שאלות

בשאלוות 1-10 חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה.

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4) \quad .(f_x) f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f(x, y) = \sin(xy) \quad (6) \qquad f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$f(r, \theta) = r \cos \theta \quad (8) \qquad f(x, y) = \arctan(2x + 3y) \quad (7)$$

$$f(u, v, t) = e^{uv} \sin(ut) \quad (10) \qquad f(x, y, z) = xy^2 z^3 \quad (9)$$

$$. z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \quad (11) \quad \text{נתון}$$

$$. x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \quad \text{הוכיחו כי}$$

$$. f(x, y, z) = e^x \left(y^2 - \frac{1}{z} \right) \quad (12) \quad \text{נתון}$$

$$. \frac{\partial f}{\partial x} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial z} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) \quad \text{חשבו}$$

הערת סימונו

$$f = f(x, y) \Rightarrow f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 ; \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$$

תשובות סופיות

$$f_y = -6x^2y + 3 \quad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \quad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \quad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \quad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_y = \cos(xy) \cdot x \quad f_x = \cos(xy) \cdot y \quad (6)$$

$$f_y = \frac{3}{1 + (2x + 3y)^2} \quad f_x = \frac{2}{1 + (2x + 3y)^2} \quad (7)$$

$$f_\theta = -r \sin \theta \quad f_r = \cos \theta \quad (8)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \quad f_y = 2xyz^3 \quad f_x = y^2z^3 \quad (9)$$

$$f_t = u \cdot e^{uv} \cdot \cos ut \quad f_v = u \cdot e^{uv} \cdot \sin ut \quad f_u = e^{uv} [v \sin ut + t \cos ut] \quad (10)$$

(11) שאלת הוכחה.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right) = 4 \quad (12)$$

הערת סימון

$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$
$f = f(x, y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}$
$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}$

נגורות חלקיות מסדר שני

שאלות

בשאלות 1-14 חשבו את כל הנגורות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה :

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1-y)(x+y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = xy(x-y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = (x-9)(2y-6)(4x-3y+12) \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy}(x+y) \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x+y} (x^2 + y^2) \quad (8)$$

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2) e^{-(x^2+y^2)} \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln(1+x^2+y^2) \quad (10)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad (11)$$

$$f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2}) \quad (12)$$

$$f(x, y) = \sin(10x + 4y) \quad (13)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (14)$$

15) חשבו $f(x, y) = \ln(xy - x^2 - y^2)$, עבור $f'_{xy}(1,1)$

16) חשבו $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, עבור $f'_{xy}(1,1)$

17) חשבו $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, עבור $f'_{xy}(1,1)$

18) נתנו $f(x, y) = \frac{x^2}{\ln y + x}$
 $\cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,e)$

הערת סימון

$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1$	$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$
$f = f(x, y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11}$	$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}$
$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12}$	$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}$

תשובות סופיות

$$f_y = -2x^2y + 10 \quad f_{xx} = 8 - 2y^2 \quad f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (1)$$

$$f_{yx} = -4xy \quad f_{xy} = -4xy \quad f_{yy} = -2x^2$$

$$f_y = \frac{x^4}{y} \quad f_{xx} = 12x^2 \ln y \quad f_x = 4x^3 \ln y \quad (2)$$

$$f_{yx} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{xy} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2}$$

$$f_y = 3y^2 - 6x \quad f_{xx} = 6x \quad f_x = 3x^2 - 6y \quad (3)$$

$$f_{yx} = -6 \quad f_{xy} = 6 \quad f_{yy} = 6y$$

$$f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y \quad f_{xx} = 6x \quad f_x = 3x^2 + 3 - 3y \quad (4)$$

$$f_{xy} = -3 \quad f_{yy} = 6y - 6$$

$$f_y = x^2 - 2xy \quad f_{xx} = 2y \quad f_x = 2xy - y^2 \quad (5)$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y \quad f_{yy} = -2x$$

$$f_x = 2[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0] \quad (6)$$

$$f_y = 2[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0]$$

$$f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0] \quad f_{xx} = 2[8y - 0 - 24]$$

$$f_{xy} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0]$$

$$f_y = e^{xy} (x^2 + xy + 1) \quad f_x = e^{xy} (xy + y^2 + 1) \quad (7)$$

$$f_{yy} = e^{xy} \cdot x(x^2 + xy + 1) + (0 + x) \cdot e^{xy} \quad f_{xx} = e^{xy} \cdot y(xy + y^2 + 1) + (y + 0 + 0) \cdot e^{xy}$$

$$f_{xy} = e^{xy} \cdot x(xy + y^2 + 1) + (x + 2y) \cdot e^{xy}$$

$$f_y = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2y) \quad f_x = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2x) \quad (8)$$

$$, f_{xx} = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2x) + (2x + 2)e^{x+y}$$

$$f_{yy} = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2y) + (2y + 2)e^{x+y}$$

$$f_{xy} = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2x) + 2y \cdot e^{x+y}$$

$$f_y = e^{-x^2-y^2} (4y - 2x^2y - 4y^3) \quad f_x = e^{-x^2-y^2} (2x - 2x^3 - 4xy^2) \quad (9)$$

$$f_{xx} = e^{-x^2-y^2} (-2x)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (2 - 6x^2 - 4y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{yy} = e^{-x^2-y^2} (-2y)(4y - 2x^2y - 4y^3) + (4 - 2x^2 - 12y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{xy} = e^{-x^2-y^2} (-2y)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (-4x \cdot 2y)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_y = \frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

$$f_x = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad (10)$$

$$f_{yy} = \frac{2 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)}$$

$$f_{xy} = \frac{2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad (11)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \quad (12)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_{xx} = -100 \sin(10x+4y)$$

$$f_x = 10 \cos(10x+4y) \quad (13)$$

$$f_{yy} = -16 \sin(10x+4y)$$

$$f_y = 4 \cos(10x+4y)$$

$$f_{yx} = -40 \sin(10x+4y)$$

$$f_{xy} = -40 \sin(10x+4y)$$

$$f_{xz} = y \quad f_{xy} = z$$

$$f_{xx} = 0 \quad f_x = yz \quad (14)$$

$$f_{yz} = x \quad f_{yy} = 0$$

$$f_{yx} = z \quad f_y = xz$$

$$f_{zz} = 0 \quad f_{zy} = x$$

$$f_{zx} = y \quad f_z = xy$$

$$-2 \quad (15)$$

$$-1 \quad (16)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (17)$$

$$\frac{4}{e^2} \left(1 + \frac{1}{e} \right) \quad (18)$$

16

נגזרות חלקיות לפי ההגדלה

שאלות

$$1) \text{ נתונה הפונקציה } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0,0)$.
- ב. האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$?
- ג. האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

$$2) \text{ מצאו את הנגזרות החלקיות של } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ בנקודה } (0,0).$$

$$3) \text{ מצאו את הנגזרות החלקיות של } f(x,y) = \begin{cases} \frac{(y+x^2)^2}{y^2+x^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ בנקודה } (0,0).$$

$$4) \text{ נתונה הפונקציה } f(x,y) = \begin{cases} \frac{y \sin x}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

א. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בנקודה $(0,0)$.

ב. הוכיחו שלפונקציה קיימות נגזרות חלקיות בנקודה $(0,0)$ וחשבו אותן.

$$5) \text{ נתונה הפונקציה } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה.
- ב. האם הנגזרות החלקיות של הפונקציה רציפות בנקודה $(0,0)$?

$$6) \text{ נתונה הפונקציה } f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

א. בדקו האם $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$, על ידי חישוב ישיר.

ב. האם הנגזרות המעורבות רציפות בנקודה $(0,0)$?

ג. האם $f_{yxyxyxy}(1,4) = f_{xyxyxyx}(1,4)$

הערה
תרגילים נוספים בהמשך הפרק, תחת הכותרת דיפרנציאביליות – שאלות 6 ו-7 סעיף ב'.

תשובות סופיות

1) א. 0 ב. לא רציפה בנקודה $(0,0)$ ג. פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

2) $f_x(0,0) = 0, f_y(0,0) = 1$

3) $f_x(0,0) = 0, f_y(0,0) = 0$

4) א. שאלת הוכחה. ב. 0

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad 5) \quad \text{א.}$$

ב. לא רציפות.

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^5 + 4x^2y^3 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

6) א. $f_{xy}(0,0) = -1 \neq f_{yx}(0,0) = 1$

ב. הנגזרות המעורבות לא רציפות בנקודה $(0,0)$. ג. כן.

דיפרנציאביליות

שאלות

.**1-4** בדקו האם הפונקציה הנתונה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{2x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4x+y}{y+4x} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (4)$$

.**5** בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה $f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

6 נתון $, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ קבוע.

- א. עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?
- ב. עבור אילו ערכים של m הפונקציה גזירה חלקית בראשית?
- ג. עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

$$7) \text{ נתון } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^m} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ קבוע.}$$

- א. עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?
 ב. עבור אילו ערכים של m הפונקציה גזירה חלקית בראשית?
 ג. עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

8) תהי f פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

$$\phi(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & xy \geq 0 \\ 0 & xy < 0 \end{cases} \text{ נגידיר פונקציה חדשה}$$

נתון $f_x(0,0) = f_y(0,0) = f(0,0)$
 הוכיחו ש- ϕ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

$$9) \text{ בדקו דיפרנציאביליות } , f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{z \sin(xy)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{3}}} & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases} \text{ בנקודה } (0,0,0).$$

$$10) \text{ נתונה } f : R^n \rightarrow R, \text{ המוגדרת על ידי} \\ . f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+\|x\|^2} - 1}{\|x\|^2} & x \neq 0 \\ 0.5 & x = 0 \end{cases} \text{ האם } f \text{ דיפרנציאבילית בנקודה } x = 0 ?$$

תשובות סופיות

- (1) לא דיפרנציאבילית.
- (2) דיפרנציאבילית.
- (3) לא דיפרנציאבילית.
- (4) לא דיפרנציאבילית.
- (5) דיפרנציאבילית בכל נקודה במישור.
 ג. $m > 2$ ב. $0 < m < 1$ ג. $m < 0.5$ ד. לכל m
- (6) א. $m > 1$
- (7) ב. $m < 1$
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) דיפרנציאבילית.
- (10) כן.

איןפי 2

פרק 19 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

190

כל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

בתרגילים בפרק זה, הניחו שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

שאלות

1) נתון : $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^2$, $z = \ln(x^2 - y^2)$
 חשבו : z_u , z_v

2) נתון : $v = 4t + k$, $u = t^2 + 4m$, $z = e^{u-v}$
 חשבו : z_t , z_m , z_k

3) נתון : $z = f(x^2 - y^2)$
 הוכחו : $y \cdot z_x + x \cdot z_y = 0$

4) נתון : $z = f(xy)$
 הוכחו : $x \cdot z_x - y \cdot z_y = 0$

5) נתון : $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$
 הוכחו : $x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0$

6) נתון : $z = f(x-y, y-x)$
 הוכחו : $z_x + z_y = 0$

7) נתון : $w = f(x-y, y-z, z-x)$
 הוכחו : $w_x + w_y + w_z = 0$

8) נתון : $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$
 הוכחו : $u_x \cos y + u_y \cos x = \cos x \cos y$

9) נתון: $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$

$$\text{הוכיחו: } \frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$$

10) נתון: $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\text{הוכיחו: } x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$$

11) נתון: $u(x, y, z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$

$$\text{הוכיחו: } xu_x + yu_y + zu_z = 2u$$

12) נתון: $h(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax)$

$$\text{הוכיחו: } h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}$$

13) נתון: $u(x, y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$

הוכיחו:

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y} \quad \text{א.}$$

$$u_{xy} = u_{yx} \quad \text{ב.}$$

ג. חשבו את $f'(0) = 2, g'(0) = 1$ אם ידוע ש- $u_{xy}(1, \pi) = 1$.

14) נתון: $y = r \sin \theta, x = r \cos \theta, u = f(x, y)$

$$\text{א. הוכיחו: } (u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2} (u_\theta)^2$$

ב. הוכיחו: $u_{rr} = f_{xx} \cos^2 \theta + 2f_{xy} \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta$

$$\text{ג. הוכיחו: } f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r$$

15) נתון $z = h(u, v)$, $v = g(x, y)$, $u = f(x, y)$ מקיימות את משוואת קושי-רימן, כולם מקיימות $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ הוכיחו כי:

א. v , u מקיימות את משוואת לפלאס.

$$\text{כולם, } v_{xx} + v_{yy} = 0 \text{ ו } u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$h_{xx} + h_{yy} = \left((u_x)^2 + (v_x)^2 \right) (h_{uu} + h_{vv})$$

16) נתון $y = r \sinh s$, $x = r \cosh s$, $u = f(x, y)$:

$$(u_x)^2 - (u_y)^2 = (u_r)^2 - \frac{1}{r^2} (u_s)^2$$

17) פונקציה $f(x, y)$ תקרא הומוגנית מסדר n , אם

הוכיחו כי אם f הומוגנית, אז:

$$x \cdot f_x + y \cdot f_y = n \cdot f(x, y)$$

$$x^2 f_{xx} + y^2 f_{yy} + 2xy f_{xy} = n(n-1) \cdot f(x, y)$$

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

א. חשבו את הנגזרות החלקיים של הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.

$$\text{ב. נתון } x = 2t, y = t$$

חובבו את $(0)' z$ באופן ישר.

$$\text{ג. נתון } t = 2x, y = x$$

חובבו את $(0)' z$ לפי כל השרשרת.

ד. בעזרת תוכנת סעיף ג' בלבד, קבעו האם הפונקציה דיפרנציאבילית.

תשובות סופיות

$$z_u = \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x \cdot 2 + \frac{1}{x^2 - y^2} (-2y) \cdot 2u \quad (1)$$

$$z_t = e^{u-v} (1) \cdot 2t + e^{u-v} (-1) \cdot 4, \quad z_m = e^{u-1} (1) \cdot 4, \quad z_k = e^{u-v} (-1) \cdot 1 \quad (2)$$

ג. $-e$. (13)

$$\text{א. } f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0 \quad (18)$$

ב. $\frac{4}{5}$

ד. לא דיפרנציאבילית.

שאר השאלות הם שאלות הוכחה, לפתרונות מלאים היכנסו לאתר GooL.co.il

איןפי 2

פרק 20 - נזרת מכוונת וגרדיאנט

תוכן העניינים

194 1. נזרת מכוונת וגרדיאנט

נגזרת מכוונת וגרדיאנט

שאלות

(1) תהי $f(x, y) = x^2 + y^2$

- א. חשבו את הגרדיאנט של f ואת אורכו בנקודה $(3, 4)$. מהי משמעות התוצאה?
- ב. הראו שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של f , העובר דרך $(3, 4)$.

(2) תהי $f(x, y) = 3x^2 y$

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$, בכיוון הווקטור $\vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

(3) תהי $f(x, y) = x - \sin(xy)$

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

בכיוון הווקטור $\vec{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$

(4) תהי $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$, בכיוון וקטור היחידה, היוצר זווית של 45° עם החלק החיוובי של ציר ה- x .

(5) תהי $f(x, y) = xy^2$

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 3)$ בכיוון لنקודה $(4, 5)$.

(6) תהי $f(x, y, z) = x^2 y^2 z$

חשבו את הנגזרת המכוונת של f , בנקודה $(2, 1, 4)$ בכיוון הווקטור $\vec{u} = 1 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j} + 2 \cdot \mathbf{k}$.

(7) אם הפוטנציאל החשמלי $V = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ בנקודה (x, y) , נתון על ידי

מצאו את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3, 4)$ בכיוון لنקודה $(2, 6)$.

(8) מצאו את הכוון בו הנגזרת המכוונת של $f(x, y) = e^x (\cos y + \sin y)$

בנקודה $(0, 0)$ היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

9) מצאו את הcyoon בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $z = 2x^3y - 3y^2z$ בנקודה $(1, 2, -1)$ היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

10) אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x, y, z) = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2$, ואני נמצא בנקודה $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$ ורוצה לhattkrer כמה שיותר מהר, באיזה cyoon עליי ללכת?

11) נתונה הפונקציה $f(x, y) = 4x^2y$.
 א. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1, 2)$,
 בכיוון וקטור היוצר זווית של 30° עם הcyoon החivoi של ציר ה- x .
 ב. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1, 2)$,
 בכיוון וקטור היוצר זווית של 30° עם הcyoon החivoi של ציר ה- y .
 ג. מצאו הצגה פרמטרית של הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1, 2)$,
 בכיוון הווקטור הנתון בסעיף ב'.

12) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = x^2yz^4$.
 מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(-1, 2, -1)$,
 בכיוון וקטור היוצר זווית של 60° עם הcyoon החivoi של ציר ה- x ,
 ו- 60° עם הcyoon החivoi של ציר ה- z .
 הניחו שהזווית עם ציר ה- y חדה.

13) נתונה הפונקציה $f(x, y) = xy^2 - x^2y^{-3}$ ונתונה הנקודה $Q(1, 1)$.
 א. חשבו את הנגזרת הcyונית של הפונקציה בנקודה Q ,
 בכיוון וקטור שיווצר זווית 60° עם הcyoon החivoi של ציר ה- x .
 ב. מצאו וקטור \vec{u} , כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q) = 0$.
 ג. האם קיימים וקטור \vec{u} , כך ש- $6 = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q)$.

$$\text{14) נתונה הפונקציה } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + 4y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

א. הוכיחו כי הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

ב. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ג. חשבו את $\nabla f(0,0)$.

ד. בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ה. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה f בנקודה $(0,0)$,

בכיוון הווקטור $(1, -1) = \vec{u}$.

ו. הסבירו מדוע הפונקציה אינה דיפרנציאבילית, בדרך שונה מהדריך בסעיף ד'.

$$\text{15) הפונקציה } f(x,y,z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2, \text{ מתארת טמפרטורה בנקודה } (z).$$

א. מהי הטמפרטורה בנקודה $(2,4,1)$?

ב. אוסף הנקודות (x,y,z) , בהן הטמפרטורה שווה 20° מהו?

ג. נמלה שנמצאת בנקודה $(2,4,1)$ רוצה להגיע לטמפרטורה גובהה יותר, באיזה כיוון עלייה לנوع, על מנת שקצב שינוי הטמפרטורה יהיה מקסימלי?

ד. הנמלה שלנו נמצאת כעת על שולחן בגובה 1 (מישור $z=1$), בנקודה $(2,4,1)$. כמו בסעיף ג, היא רוצה להגיע לטמפרטורה גובהה יותר, אך הפעם אסור לה לעזוב את השולחן.

באיזה כיוון עלייה לנوع על מנת שקצב השינוי שלה יהיה מקסימלי?

$$\text{16) גללה מוחזקת בנקודה } (2,1,14), \text{ שעל המשטח } z = 20 - x^2 - 2y^2.$$

שחררו את הגללה והיא התחליה לנوع על המשטח לפני מטה.

א. מהו המשטח הנתון?

ב. מצאו את הווקטור $(a,b,c) = (a,b,c)$, המתאר את כיוון הנפילת של הגללה.

17) תהיו $f = f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור, המקיים:

$$f(x, x^2) = \frac{x^2}{2} + x^4 \cdot 1$$

הנגזרת המכוונת של $y(x)$, בנקודה $(1,1)$, בכיוון הווקטור $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

שווה 1.

חשבו את הגרדיינט של f בנקודה $(1,1)$.

18) נתונה $f(x, y, z)$ דיפרנציאבילית, המקיים $f = f(x, y, z)$

$$\vec{u} = (-2, 1, 2), \text{ כאשר } \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 2, 4) = -\frac{5}{3}$$

חשבו את $\nabla f(0, 2, 4)$.

19) נתונה הפונקציה $f(x, y) = 12x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$

א. חשבו את $(8, 1)$, בכיוון הווקטור $\vec{u} = (3, 4)$

ב. בדקו האם הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$

ג. חשבו $(0, 0)$, בכיוון וקטור \vec{v} , היוצר זווית α עם הכיוון החיובי של ציר x .

ד. באיזה כיוון α , הנגזרת המכוונת $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$ תהיה מקסימלית? מהו הערך המקסימלי של הנגזרת?

20) נתונה הפונקציה $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} + 20x + 21y & x \neq 0 \\ 21y & x = 0 \end{cases}$

א. עבור אלו ערכים של m מתקיים $m < \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$, לכל וקטור יחידה \vec{u} ?

ב. מצאו וקטור יחידה \vec{u} , המקיים $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = 0$

הערות סימון

1) במרחב \mathbb{R}^2 ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים:

$$\vec{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \text{ או } \vec{u} = (x, y)$$

למשל: $\vec{u} = (3, 4) \Leftrightarrow \vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

במרחב \mathbb{R}^3 : $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$

ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים: $\vec{v} = (x, y, z)$ או $\vec{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

למשל: $\vec{u} = (3, 4, 5) \Leftrightarrow \vec{u} = 3 \cdot \mathbf{i} + 4 \cdot \mathbf{j} + 5 \cdot \mathbf{k}$

2) יש המסמנים וקטור \vec{u} גם ע או ו.

3) וקטור יחידה יסומן \hat{u} .

תשובות סופיות

1) א. הגרדיאנט $(6,8)$. ב. אורך הגרדיאנט 10 .

$$7.5\sqrt{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{48}{5} \quad (2)$$

$$\frac{1}{5}\sqrt{5} \quad (7)$$

$$\frac{88}{3} \quad (6)$$

$$3\sqrt{13} \quad (5)$$

8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור $(1,1)$ ושויה ל- $-\sqrt{2}$.

9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור $(12,14,-12)$ ושויה ל- 22 .

10) בכיוון הווקטור $(-2,2,-2)$.

$$\ell: (1,2,4) + t \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 8+2\sqrt{3} \right). \quad \text{ג. } 8+2\sqrt{3} \quad \text{ב. } 8\sqrt{3}+2 \quad \text{א. } (11)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \quad (12)$$

$$\text{ג. לא.} \quad \text{ב. } \vec{u} = (5,1) \quad \text{א. } -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3} \quad (13)$$

$$\nabla f(0,0) = (1,0) \quad \text{ג. } f_x = 1, f_y = 0 \quad \text{ב. } \text{הוכחה.} \quad (14)$$

ד. לא דיפרנציאבילית.

ה. 0.

15) א. 73 מעלות. ב. אליפסואיד. ג. בכיוון הווקטור $(8,32,2)$.

ד. בכיוון הווקטור $(8,32)$.

$$(16) \quad \text{א. פרבולואיד.} \quad \text{ב. } \vec{u} = (4,4,-32)$$

$$\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\nabla f(0,2,4) = (2, -3, 1) \quad (18)$$

$$12(\cos \alpha - \cos^3 \alpha)^{\frac{1}{3}} \quad \text{ג. לא דיפרנציאabilית.} \quad \text{ב. } \frac{67}{5} \quad \text{א. } (19)$$

$$\text{Max} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = 12 \left(2/\sqrt{27} \right)^{\frac{1}{3}}, \alpha = 54.73^\circ \quad \text{ד.}$$

$$\hat{u} = (21/29, -20, 29) \quad \text{ב.} \quad m > 29 \quad \text{א. } (20)$$

איןפי 2

פרק 21 - פונקציות סטומות - שימושים גיאומטריים

תוכן העניינים

199	1. פונקציות סטומות - הפן הטכני
202	2. פונקציות סטומות - הפן התאורטי
209	3. שימושים גיאומטריים

פונקציות סתומות – הפן הטכני

שאלות

1) מצאו את y , כאשר $x^2 + y^5 = xy + 1$
וחשבו את $y'(0)$.

2) מצאו את y' , כאשר $e^{xy} + x^2y^2 = 5x - 4$

3) מצאו את $y''(e)$, $y'(e)$, $y(e)$, כאשר $2\ln x + \ln y = 1$

4) נתון $z = z(x, y) \geq 0$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = 0$
חשבו את $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0), \frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$

5) נתון $y = y(x, z) \geq 0$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = -e^4$
חשבו את $y_x(0,0), y_z(0,0)$

6) נתונה המשוואה $x - y = x \cdot y \cdot f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right)$
 $x^2 \cdot z_x + y^2 \cdot z_y = z^2$
הוכיחו כי

7) נתון $z = z(x, y) \geq 0$ $z^3 - 2xz + y = 0$
מצאו $z_{xx}(1,1)$

8) נתונה משוואה $z^3 - 3xyz = 4$ ונקודה $(2,1,-2)$. מצאו את:
א. $z_{xx}(2,1)$
ב. $z_{xy}(2,1)$
ג. $z_{yy}(2,1)$

9) נתונה מערכת משוואות : $\begin{cases} u^2 - v = 3x + y \\ u - 2v^2 = x - 2y \end{cases}$

א. חשבו את u_x, v_x, u_y, v_y .

ב. הראו כי $u_{xy} = u_{yx}$.

*הערה : בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנזרות המעוובות.

10) נתונה מערכת משוואות : $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ w = u^3 + v^3 \end{cases}$

א. חשבו את w_x, w_y .

ב. חשבו y_x, y_w .

11) נתונה מערכת משוואות : $\begin{cases} xyz = 4 \\ x + y + z = 4 \\ z''(x) + y''(x) = 0 \end{cases}$

12) נתונה המערכת : $\begin{cases} x \cos u + y \sin u + \ln z = f(u) \\ -x \sin u + y \cos u = f'(u) \end{cases}$

הוכיחו כי :

$(z_x)^2 + (z_y)^2 = z^2$. א.

$z_{xy} = z_{yx}$. ב.

*הערה : בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנזרות המעוובות.

תשובות סופיות

$$y'(0) = \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$y'(1) = 5 \quad (2)$$

$$y'(e) = -\frac{2}{e^2}, \quad y''(e) = \frac{6}{e^3} \quad (3)$$

$$z_x(0,0) = z_y(0,0) = -\frac{\sin 1}{2} \quad (4)$$

$$y_x(0,0) = 0, \quad y_z(0,0) = \frac{1}{2e^4} \quad (5)$$

שאלה הוכחה. (6)

$$z_x(1,1) = -16 \quad (7)$$

$$z_{xx}(2,1) = z_{xy}(2,1) = 1, \quad z_{yy}(2,1) = 4 \quad (8)$$

$$u_x = \frac{12v-1}{8uv-1}, \quad u_y = \frac{4v+2}{8uv-1}, \quad v_x = \frac{3-2u}{8uv-1}, \quad v_y = \frac{4u+1}{8uv-1} \quad \left(uv \neq \frac{1}{8} \right) \text{ א. } (9)$$

ב. שאלה הוכחה.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -3uv, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{3}{2}(v+u) \quad (u \neq v) \text{ א. } (10)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2uv}{v+u}, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = \frac{2}{3(v+u)} \quad (u \neq \pm v) \text{ ב.}$$

(11) שאלה הוכחה.

(12) שאלה הוכחה.

פונקציות סתומות – הפן התאורטי

שאלות

1) נתונה המשוואה $y^5 + y^3 + y = x^2 - 1$.

א. הוכיחו שקיימת סביבה של הנקודה $(2,1)$, שבה המשוואה מדירה

פונקציה $y = f(x)$.

ב. חשבו את $f'(2)$.

ג. בדקו האם מתקיימים תנאים מ.פ.ס. בנקודה $(1,-2)$.

ד. הוכיחו שהמשוואה מדירה פונקציה $y = f(x)$ לכל x ממשי.

2) נתונה המשוואה $x^2 + y + e^y = 17$.

א. הוכיחו שקיימת סביבה של הנקודה $(4,0)$, שבה המשוואה מדירה

פונקציה $y = g(x)$.

ב. בדקו האם העקום המתאר את המשוואה עולה או יורדת בנקודה בה $x = 4$.

ג. הוכיחו ש-מ.פ.ס. מתקיים עבור כל נקודה שמקיימת את המשוואה.

ד. הוכיחו שהמשוואה מדירה פונקציה $y = f(x)$ לכל x ממשי.

ה. השוו בין תוצאות סעיף ג' ותוצאות סעיף ד'.

3) נתונה המשוואה $y^3 - x^3 - 3y^2 + 6x^2 + 3y - 12x + 7 = 0$.

א. בדקו האם מתקיימים תנאים משפט הפונקציה הסתומה בנקודה $(2,1)$.

ב. האם המשוואה מדירה את y כפונקציה של x בסביבת הנקודה?

ג. האם התשובה לסעיף ב' עומדת בסתריה לתשובה בסעיף א'?

4) לגבי כל אחת מהמשוואות הבאות הגדרו פונקציה $(y, x) \rightarrow F(x, y)$ מותאמת,

ובדקו האם קיימת נקודה (x_0, y_0) , כך שמתקיים תנאי מ.פ.ס.

בדקו בכל מקרה מה ניתן להסיק מהמשפט.

א. $x^2 + y^2 + 4 = 0$

ב. $xy - 40x = 100$

ג. $x^2 - y^2 = 3$

5) נתונה המשוואה $0 = 2x^3 + y^3 - 6xy$.

- מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתוומה.
- חשבו את y עבור נקודות אלה.
- מה תוכלם לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?
- השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x .

6) נתונה המשוואה הבאה: $0 = x^3 + y^3 - 3axy$ ($a > 0$).

- מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתוומה.
- חשבו את y עבור נקודות אלה.

7) נתונה המשוואה $R^2 = x^2 + y^2$.

- מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתוומה.
- בנקודות בהן לא מתקיים משפט הפונקציות הסתוומות,קבעו האם קיימת סביבה של הנקודה בה המשוואה מתארת פונקציה $y = f(x)$ שעשו זאת בשתי דרכים:

 - על ידי תיאור גרפי של העוקום.
 - על ידי חישוב.

8) נתונה המשוואה $0 = xy - ax^4 + y^4$, כאשר a קבוע ממשי.

- ידוע שהנקודה $(x_0, 0.5)$ מקיימת את המשוואה, אך לא מקיימת את תנאי משפט הפונקציה הסתוומה.
- מצאו את x_0 ואת הקבוע a .
 - האם קיימות נקודות נוספות, שמקיימות את המשוואה הנתונה אך לא מקיימות את מ.פ.ס? אם כן, מצאו אותן.
 - השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x .
 - הוכיחו, ללא שימוש בתוכנה גרפית, שבעזר הנקודה החיובית של y מקיימת את מ.פ.ס, לא קיימת סביבה שבה המשוואה מגדרה את y כפונקציה של x .

9) נתונה המשוואה $xy = \ln y - \ln x + 1$.

- מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
- חשבו את y' עבור נקודות אלה.
- מה תוכלם לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?
- השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x .
- לא שימוש בתוכנה גרפית, קבעו האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה המשוואה מתארת פונקציה.

10) נתונה המשוואה $(e-2)\ln x + \ln y = y - 1$.

- בדקו האם מ.פ.ס מתקיים עבור הנקודה (e, e) .
- כמה נקודות על העקום הנתון מקיימות $e = x$?
- האם התשובה בסעיף ב' עומדת בסתירה לתשובה בסעיף א'?
- מצאו את כל הנקודות המקיימות את מ.פ.ס.
- חשבו את הנגורות בנקודות הניל.
- השתמשו בתוכנה גרפית על מנת לקבוע, האם בנקודות בהן לא מתקיים המשפט, ניתן למצוא סביבה שבה המשוואה מגדרה פונקציה $(x, y) = f(x)$.
- חזרו על סעיף ו', רק הפעם תננו הוכחה ללא איור.

11) נתונה המשוואה $y = -8 - 6x \sin y + 6x^3$, ונמצא נקודה $(0, -2)$.

- הוכיחו שהמשוואה מגדרה פונקציה $(x, y) = y$ בסביבת הנקודה.
- פתחו את (x, y) לטור מקלורן מסדר 2.

12) ענו על הסעיפים הבאים:

- נסחו את משפט הפונקציות הסתווגות עבור $(y, g) = x$.
 - נתונה המשוואה $x = \ln(x^2 + y^2)$.
- הוכיחו כי קיימת סביבה של הנקודה $(0, 1)$, שבה המשוואה מגדרה את $x = g(y)$, $x = g(y)$.
- חשבו את $(1, g)'$.

13) נתונה המשוואה $xy = \ln y - \ln x + 1$.

א. הראו כי קיימת סביבה של הנקודה $(1,1)$, שבה המשוואה מגדירה את x

כפונקציה של y , $.x = g(y)$.

ב. הוכחו שהנקודה $(1,1)$ היא נקודת מקסימום מקומי של $.g(y)$.

14) בסעיפים א-ב, האם המשוואה $z = 3x^2y - yz^2 - 4xz = 7$:

א. מגדירה פונקציה סתוומה $.z = z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(-1,1,2)$?

ב. מגדירה פונקציה סתוומה $.z = y(x,z)$ בסביבת הנקודה $(-1,1,2)$?

ג. הוכחו שהפונקציה $.y = y(x,z)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(-1,2)$.

15) נתונה המשוואה $z = 3x^3 - y^3 - z^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 3z^2 = 1$.

בסעיפים א-ב, על סמך מ.פ.ס, האם המשוואה:

א. מגדירה פונקציה סתוומה $.z = z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(1,2,0)$?

ב. מגדירה פונקציה סתוומה $.z = z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(4,4,1)$?

ג. הוכחו, ללא שימוש במ.פ.ס, שהמשוואה מגדירה פונקציה סתוומה $.z = z(x,y)$, בסביבת הנקודה $(4,4,1)$.

16) נתונה המשוואה $1 = \sin(x+y) + \sin(y+z)$.

מצאו נקודת שבסביבה שלה המשוואה מגדירה פונקציה

ומצאו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה המתאימה.

17) נתונה מערכת המשוואות:

$$1) x = u + v, \quad 2) y = u^2 + v^2, \quad 3) w = u^3 + v^3$$

א. בדקו האם מתקיים תנאי משפט הפונקציה הסתוימה עבור $w = w(x,y)$ בנקודה $(x,y,u,v,w) = (1,1,0,1,1)$.

במידה שכן, חשבו בנקודה את $.w_x, w_y$.

ב. חזו על סעיף א', עבור הנקודה $(x,y,u,v,w) = (2,2,1,1,2)$.

ג. האם קיימת סביבה של הנקודה $(x,y,u,v,w) = (2,2,1,1,2)$, שבה מערכת המשוואות מגדירה פונקציה $? w = w(x,y)$

במידה שכן, חשבו בנקודה את $.w_x, w_y$.

ד. מצאו את כל הנקודות במישור, עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתוימה עבור $w = w(x,y)$.

18) נתונה מערכת המשוואות :

1) $x = a \cos \phi \cos \theta, \quad 2) \quad y = b \sin \phi \cos \theta, \quad 3) \quad z = c \sin \theta \quad (a, b, c > 0)$

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $\phi = \phi(x, y)$

$$\text{בנקודה } P_0, \text{ המתאימה לערכים } \phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}$$

במידה שכן, חשבו בנקודה את ϕ_x, ϕ_y .

בדקו את התשובה על ידי חישוב ישר.

ב. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $z = z(\phi, x)$

$$\text{בנקודה } P_0, \text{ המתאימה לערכים } \phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}$$

במידה שכן, חשבו בנקודה את z_ϕ, z_x .

תשובות סופיות

- 1) א. הוכחה. ב. $\frac{4}{9}$. ג. כן. ד. הוכחה.
- 2) א. הוכחה. ב. העקום יורץ. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. מוצאת סעיף ד' טוביה יותר.
- 3) א. לא מתקיים. ב. כן. ג. לא.
- 4) א. לא קיימת. ב. הנקודה (1,140) למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס. ג. הנקודה (2,1) למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס.
- 5) א. כל נקודה (x, y) שעלה המשווה, ואשר **שונה** מהנקודות $(0,0), (2,2)$.
- ב. $y' = -\frac{2x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$
- 6) א. כל נקודה על העקום הנתון אשר **שונה** מהנקודות $(0,0), (\sqrt[3]{4}a, \sqrt[3]{2}a)$
- ב. $y'' = -\frac{\left[2x - a\left(-\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right)\right](y^2 - ax) - \left[2y\left(-\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right) - a\right](x^2 - ay)}{(y^2 - ax)^2}$
- 7) א. כל הנקודות על המנגנון אשר **שונות** מהנקודות $(R,0), (-R,0)$.
ב. לא קיימת סביבה כנדירש.
- 8) א. $(0,0), (-0.5, -0.5)$. ב. כן, $a = \frac{1}{2}$. ג. לא. ד. שאלת הוכחה.
- 9) א. כל נקודה (x, y) שעלה $xy = \ln y - \ln x + 1$, ואשר **שונה** מהנקודה $(1,1)$.
- ב. $y' = -\frac{y + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{y}}$
- 10) א. כן. ב. שתי נקודות. ג. לא. ד. כל נקודה על העקום אשר **שונה** מהנקודה $(1,1)$.
- ה. $(x > 0, y > 0, (x, y) \neq (1,1))$ $y'(x) = \frac{(2-e)y}{x(1-y)}$
ו. לא ניתן. ז. שאלת הוכחה.
- 11) א. שאלת הוכחה. ב. $x^2(x-2)$. ג. ראה סרטון.
- 12) א. ראה סרטון. ב. שאלת הוכחה.
- 13) א. הוכחה. ב. שאלת הוכחה.
- 14) א. לא. ב. כן. ג. שאלת הוכחה.
- 15) א. כן. ב. לא ניתן לדעת. ג. שאלת הוכחה.
- 16) הנקודה היא $(\pi, 0, 0, 0.5\pi)$ והגזרות הן: $y_x(0,0,0.5\pi) = -1$, $y_z(0,0,0.5\pi) = 0$

ב. לא מתקיים.

$$\frac{\partial w}{\partial y}(1,1) = \frac{3}{2}, \frac{\partial w}{\partial x}(1,1) = 0 \text{ נ. } \mathbf{(17)}$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \frac{1}{2}x^2 \right\}. \quad \text{נ. } w_x(2,2) = -3, w_y(2,2) = 3. \quad \mathbf{(18)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2c}{a}, \frac{\partial z}{\partial \phi} = -c \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{b}{a\sqrt{3}}, \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{b} \text{ נ.}$$

שימושים גיאומטריים

שאלות

1) נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 3$ מהי המשוואת מישור משיק למשטח בנקודה P , בה $x = -2, y = 1$?

2) מצאו משווה של מישור משיק למשטח $z = xy$ בנקודה $(-2, 2, -2)$, וכן משווה של הישר הפרטורי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.

3) מצאו מישור המשיק למשטח $z = 21 - 27x^2 - 27y^2$.
המקביל למישור $z = 8x + 8y + 18$.

4) למשטח \sqrt{a} העבירו מישור המשיק בנקודה כלשהי.
מישור זה חותך את הצירים z, y, x בנקודות A, B, C , בהתאם.
נסמן: $O = (0, 0, 0)$.

הוכחו $a = OA + OB + OC$.
(למעשה נוכיח שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודות ההשקה)

5) נתון המשטח $z = 8xz^2 - 2x^2yz + 3y^2$, ונתונה הנקודה $(1, 2, -1)$.
הישר הנורמלי למשטח בנקודה הנתונה, חותך את המישור $x + 3y - 2z = 10$ בנקודה Q .
מצאו את הנקודה Q .

6) הראו שהמשטח $z = 4 - x^2 - 2yz + y^3$ מאונך לכל אחד מחברי משפחת
המשטחים $x^2 + 1 = (2 - 4a)y^2 + az^2$, בנקודת החיתוך $(1, -1, 2)$.

7) מצאו משווה של הישר המשיק לעקום $C: x = 6\sin t, y = 4\cos 3t, z = 2\sin 5t$ בנקודה בה $t = \frac{1}{4}\pi$

(8) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. נתון עקום $C: x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ במשוואת העקום.
ונתונה נקודה $P(x_0, y_0, z_0)$, המתקבלת מהצבת $t = t_0$ במשוואת העקום.

$$\text{הוכיחו כי} \quad x'(t_0) \cdot (x - x_0) + y'(t_0) \cdot (y - y_0) + z'(t_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

- ב. מצאו את משוואת המשור הנורמל לעקום
 $C: x = 6 \sin t, y = 4 \cos 3t, z = 2 \sin 5t$
בנקודה בה $t = 0.25\pi$

(9) נתונות שתי עקומות
 $C_1: x = 2t + 1 \quad y = t^2 - 1 \quad z = t^2 + t$
 $C_2: x = s^2 \quad y = -s \quad z = s - 1$

ונתנו כי שתי העקומות נמצאות על משטח S , וכי שתיהן נחתכות בנקודה
הנמצאת במשור xy .

- א. מצאו את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.
ב. מצאו את משוואת המשור המשיק לשתי העקומות בנקודת החיתוך
שבין שתי העקומות.

$$C_1: x = 2t + 1, \quad y = t^2 - 1, \quad z = t^2 + t$$

(10) נתונות שלוש עקומות
 $C_2: x = s^2, \quad y = -s, \quad z = s - 1$
 $C_3: x = u + 2, \quad y = u, \quad z = u^2 - 1$

ונתנו כי שלוש העקומות נמצאות על משטח S , וכי שלושתן נחתכות בנקודה
הנמצאת במשור xy .

- א. מצאו את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.
ב. האם בנקודה הניל ניתן להעביר מישור משיק למשטח S ? נמקו!

(11) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו שמשוואת הישר המשיק לעקום
 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$:

בנקודה P שעליו, היא $\ell: P + t \cdot \vec{\nabla F}(P) \times \vec{\nabla G}(P)$

ב. בנקודה $(1, -1, 1)$, מצאו את משוואת הישר המשיק לעקום :

$$\begin{cases} 2xz - x^2y = 3 \\ 3x^2y + y^2z = -2 \end{cases}$$

12) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו שמשוואת המישור הנורמלי לעקום
 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$

בנקודה P שעליו, היא $0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)$, כאשר $(a, b, c) = \vec{\nabla F}(P) \times \vec{\nabla G}(P)$.

ב. בנקודה $(1, -1, 1)$, מצאו את משוואת המישור הנורמלי לעקום :

$$\begin{cases} 2xz - x^2y = 3 \\ 3x^2y + y^2z = -2 \end{cases}$$

13) נתונה הפונקציה $x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = u^2 + v^2$, על ידי $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

מהו הנקודות שעבורן קיימים מישור משיק?

מצאו את משוואת המישור המשיק, בנקודה $(u, v) = (1, 0)$.

14) מצאו ביטוי לווקטור היחידה, המאונך למשטח

$x = \sin u \cos v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos u$

עבור $u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, \pi]$,

באיזה משטח מדובר?

תשובות סופיות

$$3x - 6y + 2z + 18 = 0 \quad (1)$$

$$x - y + z + 6 = 0, (-2, 2, -2) + t(1, -1, 1) \quad (2)$$

$$x + 8y + 18z = 21, x + 8y + 18z = -21 \quad (3)$$

שאלה הוכחה. (4)

$$Q(7, -9, -15) \quad (5)$$

שאלה הוכחה. (6)

$$\ell: (x, y, z) = (3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -\sqrt{2}) + s(3\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, -5\sqrt{2}) \quad (7)$$

$$3x - 6y - 5z = 26\sqrt{2} \quad \text{ב.} \quad (8)$$

$$x - 2z = 1 \quad \text{ב.} \quad P(1, -1, 0) \quad (9)$$

(10) א. קיבל שנקודות החיתוך היא $P(1, -1, 0)$. ב. לא.

(11) א. שאלה הוכחה. ב. $(x, y, z) = (1, -1, 1) + t(3, 16, 2)$.

(12) א. שאלה הוכחה. ב. $3x + 16y + 2z = -11$.

(13) כל נקודה, למעט $(0, 0, 0)$.

$$\vec{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (14)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

איןפי 2

פרק 22 - נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים והדיפרנציאל השלים

תוכן העניינים

1. נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים	213
2. הדיפרנציאל השלים - נוסחת הקירוב הלייניארי	215

נוסחת טילור לפונקציה של שני משתנים

שאלות

פתחו את הפונקציות בשאלות 1-4 לטור טילור עד סדר שני סביב הנקודה (a,b) :

$$(a,b) = (1,2) \quad f(x,y) = x^2y + 3y - 2 \quad (1)$$

$$(a,b) = (0,0) \quad f(x,y) = (1+y) \ln(1+x-y) \quad (2)$$

$$(a,b) = (0,0) \quad f(x,y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (3)$$

$$(a,b) = (2,1) \quad f(x,y) = \sqrt[3]{\frac{x^2-y}{x+y^2}} \quad (4)$$

5) בעזרת התוצאה של שאלה 2, חשבו בקירוב את $\ln(1.5)$.

6) בעזרת התוצאה של שאלה 3, חשבו בקירוב את e^3 .

7) בעזרת התוצאה של שאלה 4, חשבו בקירוב את $\sqrt[3]{2}$.

תשובות סופיות

$$f(x, y) = 6 + 4(x-1) + 4(y-2) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = x - y - \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{3}{2}y^2 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 1 + 4y - x^2 + 7y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 1 + \frac{1}{3}(x-2) - \frac{1}{3}(y-1) - \frac{7}{81}(x-2)^2 + \frac{1}{9}(x-2)(y-1) \quad (4)$$

$$\frac{3}{8} \quad (5)$$

$$19 \quad (6)$$

$$\frac{101}{81} \quad (7)$$

הDİפְרָנְצִיאָל הַשְּׁלָם – נוֹסְחַת הַקִּירֻוב הַלִּינְיָאָרִי

שאלות

- 1) חשבו בקירוב: $\ln(0.01^2 + 0.99^2)$.
- 2) בעזרת הדיפרנציאל השלים, מצאו בקירוב את הערך של $\sqrt[4]{15.09 + (0.99)^2}$.
- 3) נחשב את הנפח של גליל על סמך תוצאות המדידה של רדיוסו וגובהו. ידוע שהשגיאה היחסית במדידת הרדיוס אינה עולה על 2%, והשגיאה היחסית במדידת הגובה אינה עולה על 4%. הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית בנפח המחשב.
- 4) נתונות שתי צלעות במלבן $a = 10\text{ cm}$, $b = 24\text{ cm}$. חשבו את השינוי המדויק ואת השינוי המקורב (בעזרת דיפרנציאל) של אורך אלכסון המלבן אם את הצלע a יאריכו ב- 4 mm ואת הצלע b יקצרו ב- 1 mm .
- 5) מדוד את האורך של תיבת, את רוחבה ואת גובהה. השגיאה היחסית בכל מדידה אינה עולה על 5%. הערכו את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית באורך של אלכסון התיבה, המחשב לפי תוצאות המדידה.

תשובות סופיות

$$\approx -0.01 \quad (1)$$

$$2 \frac{7}{3200} \quad (2)$$

$$8\% \quad (3)$$

$$\text{שינויי מדויק: } 0.06472, \text{ שינויי מקורב: } 0.06153. \quad (4)$$

$$5\% \quad (5)$$

איןפי 2

פרק 23 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

- 216.....
1. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהfonקציות בשאלות 1-8,
מצאו נקודות קритיות וסווgoו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

9) נתון משטח $z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$.
מצאו את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפchan 32 סמ"ק, חשבו את ממד htiba שטח הפנים שלה הוא מינימלי.

11) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $z = -2x - 2y + z = 0$
וכן את הנקודה על המישור הקרוב ביותר לנקודה הניל.

- (12)** יוצר מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.
 עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$ 6 ועלות הייצור מחשבון בסין היא \$.8.
 מנהל השיווק אומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ, ואת הביקוש Q_2 למחשבון בסין, על ידי: $Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$, $Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$, P_1 ו- P_2 , על מנת למינimize את הרווח? מהו רוחח זה?

- (13)** נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2 + axy$.
 א. הוכיחו שהנקודה $(0,0)$ היא נקודת קרייטית.
 ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של a הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכף, או שלא ניתן לדעת.

- (14)** מצאו שני מספרים, $a > b$, כך ש- $\int_a^b (24 - 2x - x^2)^{\frac{1}{5}} dx$ יהיה מקסימלי.

תשובות סופיות

- (1)** אוכף ; $(-0.5, 1)$ מינימום.
(2) מינימום ; $(1, -2)$, $(-1, 2)$; $(-1, -2)$ אוכף.
(3) אוכף ; $(0, 0)$ מינימום.
(4) אוכף. $(-1, 0), (1, 1), (1, -1)$; $(0, 1)$ מקסימום ; $(-1, 1)(-1, -1)$ אוכף.
(5) מקסימום.
(6) מקסימום.
(7) מקסימום.
(8) אין נקודות קרייטיות.
(9) $z = 4$, $z = 3$
(10) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
(11) מרחק מינימי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.
(12) $P_1 = 10\$, P_2 = 12\$$ רוחח מקסימלי \$ 288\$.
(13) א. שאלת הוכחה. ב. עבור $a = -2$, $a = 2$, $a < -2$, $a > 2$, לא ניתן לדעת ; אוכף ; $a < -2$ מינימום.
(14) $a = -6$, $b = 4$

אינפי 2

פרק 24 - קייזון של פונקציה רבת משתנים (רמה מתקדמת) - הריבועים
הפחותתיים

תוכן העניינים

- 218 1. קייזון של פונקציה רבת משתנים

קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתוך) – ריבועיםՓחותים

שאלות

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציות בשאלות 1-5:

$$f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

$$(z = f(x, y)) z^3 + z + xy - 2x - y + 2 = 0 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x - 12y + 8 \quad (4)$$

$$(x, y, z > 0) f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (5)$$

6) מצאו מרחק מינימלי בין הפרבולה $y = x^2 + 2x$, $y = x^2 + 1$, לפרבולה $x = -y^2$.

* לפתרון תרגיל זה נדרש ידע בפתרון נומי (מקורב) של משווה, כגון שיטת ניוטון רפסון.

בשאלות 7-11 נתונות n נקודות, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, ויש למצוא קו עקום מהצורה $y = h(x)$, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי.

$$\cdot (2, 2.5), (1, 0.8), (3, 3.2), (4, 3.5) \text{ הדגימו עבור הנקודות } h(x) = ax + b \quad (7)$$

$$\cdot (-1, 2), (2, 0), (0, -2) \text{ הדגימו עבור הנקודות } h(x) = ax^2 + bx \quad (8)$$

$$\cdot (10, 20.2), (6, 12.9), (4, 8.5), (0.5, 4) \text{ הדגימו עבור הנקודות } h(x) = ax + \frac{b}{x} \quad (9)$$

$$\cdot (4, 33), (2, 8.5), (0.5, 2.3), (1, 4.5), (0.1, 90) \text{ הדגימו עבור הנקודות } h(x) = ax^2 + \frac{b}{x^2} \quad (10)$$

. $(1,4.5), (0.5,2.3), (0,0.8), (-1,0.1), (-0.5,0.12)$, הדגימו עבור $h(x) = ax^2 + bx + c$ (11)

12) נתונות n נקודות: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.
 מצאו ישר $y = ax + b$, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר
 והנקודות יהיה מינימלי.
 יש להגיע לנוסחה מפורשת עבור a ו- b .

הערה: בשאלות 11 ו-12 ניתן להניח ש- a ו- b , המתפללים מפתרון המשוואות $f_a = 0$, $f_b = 0$,
 נוותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי המרחקים האנכיים

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n (h(x_i) - y_i)^2$$

תשובות סופיות

1) לכל t ממשי, מקסימום.

2) מקסימום.

3) אין קיצון. (1,2) אוכף.

4) אין קיצון. (1,2) אוכף.

5) מינימום.

6) 0.375

$$y = 0.88x + 0.3 \quad (7)$$

$$y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x \quad (8)$$

$$y = 2.032x + \frac{1.5039}{x} \quad (9)$$

$$y = 2.06x^2 + \frac{0.9}{x^2} \quad (10)$$

$$y = 1.48x^2 + 2.196x + 0.824 \quad (11)$$

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i x_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (12)$$

איןפי 2

פרק 25 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנץ')

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ.....
220.....

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנץ')

שאלות

בשאלות 1-4 מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות, בכפוף לאילוץ הנתון :

$$f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

5) נתונה בעיית הקיצון $\max_{x, y > 0} \{xy\}$ s.t. $x + 3y = 12$, כאשר $x, y > 0$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

6) נתונה בעיית הקיצון $\max_{x, y \geq 0} \{2x + y\}$ s.t. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 9$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x + 3y = 12$,

מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

8) מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$, מצאו את הנקודות

שמרחקן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

9) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהישר $3x - 6y + 4 = 0$

$$\text{לפרבולה } x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$$

רמז : מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $ax + by + c = 0$ הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

10) מושילה קונה בשוק x ק"ג מילפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
 התועלת מצricaת הסל, (x, y) , נתונה על ידי $u(x, y) = \ln x + \ln y$.

מחיר ק"ג מילפפונים 1 ש"ח, וממחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.
 מושילה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת 16,
 והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימלית.
 נסחו ופתרו את בעיית מושילה.

11) דני קונה בשוק x ק"ג מילפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
 התועלת מצricaת הסל (x, y) , נתונה על ידי $u(x, y) = xy$.

מחיר ק"ג מילפפונים 1 ש"ח, וממחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.
 לדני תקציב של 12 ש"ח.
 נסחו ופתרו את בעיית דני.

12) עקומת התמורה בין מגנו, (x) , ואננס, (y) , היא $x^2 + y^2 = 13$.
 לדני תועלת $y = 4x + 6$.
 דני מחפש את הסל $(\text{אננס, מגנו}) = (x, y)$, על עקומת התמורה.
 המביא למקסימום את התועלת שלו מצricaת מגנו ואננס.
 נסחו ופתרו את הבעיה.

13) ליצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$.
 המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K = 2$, $P_L = 1$.
 הייצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף (K^*, L^*) המביא למינימום את העלות.
 נסחו את בעיית הייצרן (לא לפתרור).

14) נתונה בעיית קייזון תחת אילוץ $p_1x + p_2y = I$.
 תהי (x^*, y^*) נקודת הפתרון של הבעיה. ניתן להניח מצב כללי של השקעה.
 הוכיחו כי כופל לגראנזי λ מקיים $\frac{x \cdot u_x + y \cdot u_y}{I} = \lambda$ בנקודת הפתרון של הבעיה.

תשובות סופיות

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min\left(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}\right) \quad \text{(1)}$$

$$\min(0, \pm 1) \quad \max(\pm 1, 0) \quad \text{(2)}$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad \text{(3)}$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad \text{(4)}$$

$$\max(6, 2) \quad \text{(5)}$$

$$\max(9, 36) \quad \text{(6)}$$

$$(6, 2) \quad \text{(7)}$$

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min\left(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}\right) \quad \text{(8)}$$

$$7/\sqrt{45} \quad \text{(9)}$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad \text{(10)}$$

$$\max(6, 2) \quad \text{(11)}$$

$$\max(2, 3) \quad \text{(12)}$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad \text{(13)}$$

(14) שאלת הוכחה.

אינפי 2

פרק 26 - נושאים מתקדמים - הציגה פרמטרית של פונקציה

תוכן העניינים

223	1. הציגה פרמטרית של עקום.....
225	2. הנגורת ושימושה.....
226	3. שימושי האינטגרל המסוים.....

הציגה פרמטרית של עקום

שאלות

1) עברו מן הציגה הפרמטרית הנתונה, להציגה קרטזית:

א. $t \geq 0, x = t^2 + 1, y = t^2$

ב. $0 \leq t \leq \pi, x = \sin t, y = \cos^2 t$

ג. $\pi \leq t \leq 2\pi, x = \cos t, y = 4 \sin t$

2) עברו מן הציגה הקרטזית הנתונה, להציגה פרמטרית:

א. $1 \leq x \leq 4, y = x^4 + 1$

ב. $-2 \leq x \leq 2, y = -\sqrt{4-x^2}$

ג. $-2 \leq x \leq 2, y = +\sqrt{4-x^2}$

3) להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.
על ידי חילוץ של הפרמטר t , מצאו משווה מתאימה,
שבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x = t - 4, y = t^2$

ב. $x = -4 + \cos t, y = 1 + 2 \sin t$

ג. $x = 4 + \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$

ד. $x = t(t+1) + 1, y = t(0.5t+1) + 1$

ה. $x = \frac{20t}{4+t^2}, y = \frac{20t-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x = ke^t + ke^{-t}, y = ke^t - ke^{-t}$

ז. $x = k \cos t, y = k \sin t$

תשובות סופיות

$$y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1 \quad \text{ב.} \quad y = x - 1, x \geq 1 \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0 \quad \text{ג.}$$

$$x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, \pi \leq t \leq 2\pi \quad \text{ב.} \quad x = t, y = t^4 + 1, 1 \leq t \leq 4 \quad (2)$$

$$x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi \quad \text{ג.}$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}} \quad \text{ג.} \quad (x+4)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{ב.} \quad y = (x+4)^2 \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$x^2 - y^2 = 4k^2 \quad \text{ג.} \quad x^2 + y^2 = 25 \quad \text{ה.} \quad x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1 \quad \text{ט.}$$

הנגזרת ושימושה

שאלות

1) חשבו את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה
 $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t \cos t \end{cases}$.
 הנתונה בצורה פרמטרית.

- 2)** נתון העקום $\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$.
- שרטטו את העקום.
 - חשבו את (x', y) בשלוש דרכים שונות.
 - מצאו את משוואת המשיק לעקום, בנקודת $t = -1$.
 - מצאו את משוואת הנורמל לעקום, בנקודת $t = -1$.

- 3)** נתון העקום $\begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = 3t^2 - 9 \end{cases}$.
- שרטטו את העקום.
 - מצאו את משוואת המשיק לעקום בנקודת $(0, 0)$.
 - מצאו את הנקודות עבורהן המשיק לעקום הוא אופקי,
ואת הנקודות עבורהן המשיק לעקום הוא אנכי.
 - עבור אילו ערכים של t העקום קמור/קעור?

תשובות סופיות

$$y' = \frac{\cos t - \sin t \cdot t}{1 - \cos t}, \quad y'' = \frac{(-t \cos t - 2 \sin t)(1 - \cos t) - \sin t(\cos t - t \sin t)}{(1 - \cos t)^3} \quad (1)$$

$$(2) \text{ א. ראו בסרטון. ב. } y = 2x + 3 \text{ ג. } y' = \frac{-2}{2t+1}.$$

$$(3) \text{ א. ראו בסרטון. ב. } y = \pm\sqrt{3}x \text{ ג. אופקי-} (0, -9) \text{ אנכי-} (-2, -6), (2, -6) \text{ ד. } -1 < t < 1 \text{ או } t > 1 \text{ קמור.}$$

שימושי האינטגרל המסוים

1) חשבו את השטח הכלוא בעקום $C: \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 4t \end{cases}$

2) חשבו את השטח הכלוא בתחום האלייפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, כאשר $0 < a, b >$,

* שימושו לב שאם $a = b = r$, נקבל שטח הכלוא בתחום מעגל עם רדיוס r .

3) חשבו את השטח הכלוא בין העקומים $x = \cos t$, $y = t + \sin t$ לבין ציר ה- x .

4) חשבו את השטח הכלוא בין העקומים $x = 4\cos t$, $y = \sin^2 t$ לבין ציר ה- x .

5) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

6) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = \cos t \\ y = t + \sin t \end{cases}, (-1, \pi), (1, 0)$ מהנקודה לנקודה $(1, 0)$ בקטע $(-1, \pi)$.

7) חלקיים נס לארוך מסלול, המוגדר על ידי הציגה הפרמטרית $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

מצאו את המרחק שהחליק עבר והשו אותו לאורך העקום עצמו.

8) חlek העקום $\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}, t = 0$ לביין $t = \pi$, מסתובב סביב ציר ה- x . מהו שטח המעטפת הנוצרת?

9) חlek העקום $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, t = 0$ לביין $t = \frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- y . מהו שטח המעטפת הנוצרת?

10) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases}, -\pi \leq t \leq 2\pi$

. $1 \leq t \leq 3$, $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + (e^t)\mathbf{k}$ חשבו את אורך העקום **11**

תשובות סופיות

1 $8/3$

2 πab

3 1.5π

4 $16/3$

5 8

6 4

7 אורך העקום הוא 2π . המרחק שעבר החלקיק הוא 4π .

8 $4\pi r^2$

9 $6\pi/5$

10 $6\pi\sqrt{29}$

11 $\sqrt{3}e(e^2 - 1)$

אינפי 2

פרק 27 - נושאים מתקדמים - הצגה פולרית של פונקציה

תוכן העניינים

228	1. קוואורדינטות קוטביות.....
230	2. הנגורת ושימושה.....
231	3. שימושי האינטגרל המסוים.....

קואורדינטות קוטביות

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ لنקודה קרטזית.
- ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(-1, -1)$ لنקודה קוטבית.

2) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(10, -\frac{\pi}{3}\right)$ لنקודה קרטזית.
- ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(0, -4)$ لنקודה קוטבית.
- ג. המירו את הנקודה הקרטזית $(2, 2)$ لنקודה קוטבית.

3) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. המירו את המשוואה $x^2 - 4x - xy = 1$ לקואורדינטות קוטביות.
- ב. המירו את המשוואה $\theta = -4\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

4) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. המירו את המשוואה $y^2 + x^2 = 4y$ לקואורדינטות פולריות.
- ב. המירו את המשוואה $x = 10$ לקואורדינטות פולריות.
- ג. המירו את המשוואה $y = 4$ לקואורדינטות פולריות.

5) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. המירו את המשוואה $r = 4$ לקואורדינטות קרטזיות.
- ב. המירו את המשוואה $\theta = \pi/4$ לקואורדינטות קרטזיות.
- ג. המירו את המשוואה $r = 2\cos\theta + 4\sin\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.
- ד. המירו את המשוואה $6r^3 \sin\theta = 4 - \cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

תשובות סופיות

$$(r, \theta) = \left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} \right) \text{ ב. } (x, y) = (2, 2\sqrt{3}) \text{ א. } \mathbf{(1)}$$

$$(r, \theta) = \left(\sqrt{8}, \frac{3\pi}{4} \right) \text{ ג. } (r, \theta) = \left(4, \frac{3\pi}{2} \right) \text{ ב. } (x, y) = (5, -5\sqrt{3}) \text{ א. } \mathbf{(2)}$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 2^2 \text{ ב. } 4r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta = 1 + r \cos \theta \cdot r \sin \theta \text{ א. } \mathbf{(3)}$$

$$r \sin \theta = 4 \text{ ג. } r \cos \theta = 10 \text{ ב. } r = 4 \sin \theta \text{ א. } \mathbf{(4)}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \text{ ג. } y = x \text{ ב. } x^2 + y^2 = 4^2 \text{ א. } \mathbf{(5)}$$

$$6 \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^3 \cdot y = 4 \sqrt{x^2 + y^2} - x \text{ ט}$$

הנגזרת ושימושה

שאלות

1) מצאו את המשוואת המשיק לעקום $r = 3 + 8 \sin \theta$ בנקודה $\theta = \frac{\pi}{6}$.

2) מצאו את המשוואת המשיק לעקום $r = 1 - 2 \sin \theta$ בראשית הצירים.

תשובות סופיות

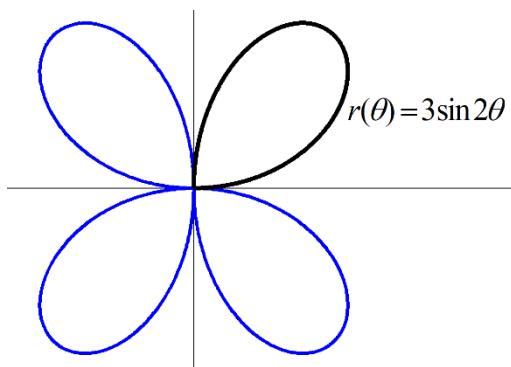
$$y = \frac{11\sqrt{3}}{5}x - \frac{98}{5} \quad (1)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \quad (2)$$

שימושי האינטגרל המסוים

שאלות

- 1) חשבו את השטח של הלוואה הפנימית של $r = 2(1 + 2 \cos \theta)$.
- 2) חשבו את השטח הכלוא בתווך $r = 6 + 4 \cos \theta$ ומשמאלי לציר ה- y .
- 3) חשבו את השטח הכלוא בתווך $r = 3 + 2 \sin \theta$.
- 4) חשבו את השטח המוגבל בתווך $r = 3 + 2 \sin \theta$ ומחוץ ל- $r = 2$.
- 5) חשבו את השטח המוגבל בתווך $r = 2 + 3 \sin \theta$ ומחוץ ל- $r = 2$.
- 6) חשבו את השטח המוגבל בתווך $r = 2 + 3 \sin \theta$ ובתווך $r = 2$ ובי-תווך $\theta = \pi/2$.
- 7) חשבו את השטח הכלוא בתווך המעגל $r = 2 \sin \theta$ ומחוץ למעגל $r = 1$.
- 8) מצאו את אורך הקרדיויאידה $r = 1 + \cos \theta$.
- 9) מצאו את האורך של עלה אחד של הוורד $r = 3 \sin 2\theta$.
אין צורך לחשב את האינטגרל!



- 10) מצאו את אורך העקום $r = \theta$, כאשר $0 \leq \theta \leq 1$.

- 11) העקום $r = \cos \theta$, כאשר $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- x .
מהו שטח המעתפת של הגוף הנוצר?

12) העקום $r = 4 + 4 \sin \theta$, כאשר $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- y . מהו שטח המעטפת של הגוף הנוצר?

תשובות סופיות

$$S = 4\pi - 6\sqrt{3} = 2.174 \quad (1)$$

$$S = 22\pi - 48 \quad (2)$$

$$S = 11\pi \quad (3)$$

$$S = \frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{14\pi}{3} = 24.187 \quad (4)$$

$$S = \frac{11\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{3} = 2.196 \quad (5)$$

$$10.37 \quad (6)$$

$$S = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (7)$$

$$8 \quad (8)$$

$$\ell = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3 \cos^2 2\theta} d\theta \quad (9)$$

$$\ell = \frac{\sqrt{2 + \ln(\sqrt{2} + 1)}}{2} \quad (10)$$

$$S_x = \pi \quad (11)$$

$$S_y = 102.4\pi \quad (12)$$

נספח - גרפים נפוצים בקואורדינטות פולריות

קוויים

- הימני $x = a$. $r \cos \theta = a$ **(1)**

- הימני $y = b$. $r \sin \theta = b$ **(2)**

- הימני העובר דק' הראשית $x = (\tan \beta) \cdot y$. $\theta = \beta$ **(3)**

מעגלים

- מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו a . $r = a$.**1**

- מעגל שמרכזו בנקודה $(a, 0)$ ורדיוסו $|a|$. $r = 2a \cos \theta$.**2**

- מעגל שמרכזו בנקודה $(0, b)$ ורדיוסו $|b|$. $r = 2b \sin \theta$.**3**

. $\sqrt{a^2 + b^2}$ - מעגל שמרכזו בנק' (a, b) ורדיוסו $r = 2a \cos \theta + 2b \sin \theta$.**4**

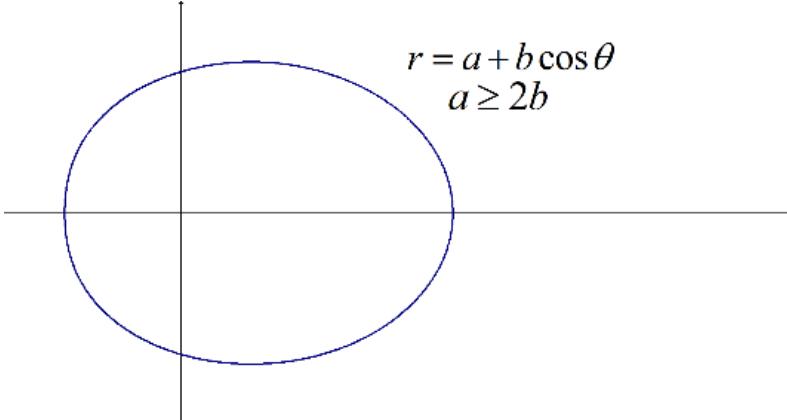
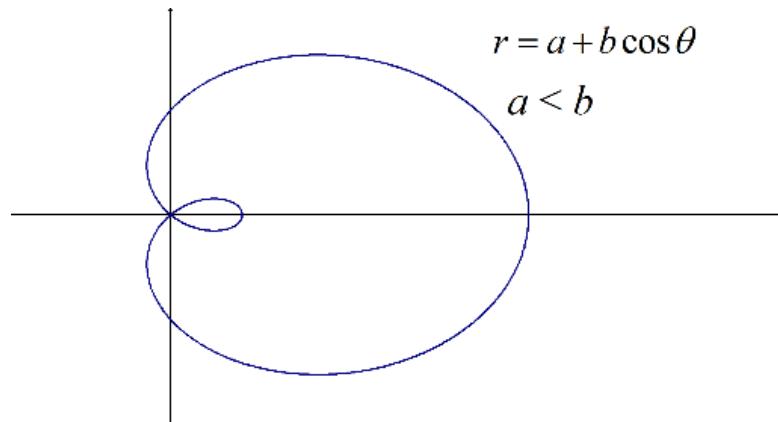
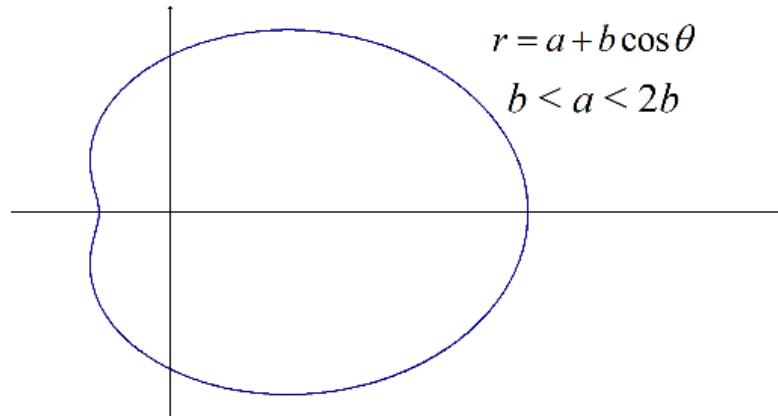
קרדיודות ולמניסקטות

(1) קראדיודות : $r = a \pm a \cos \theta$, $r = a \pm a \sin \theta$.
גרף בצורת לב שמכיל את הראשית.

(2) למניסקטות עם לולאה פנימית $(a < b)$: $r = a \pm b \cos \theta$, $r = a \pm b \sin \theta$.
גרף שיכיל לולאה פנימית ושתמיד יכיל את הראשית.

(3) למניסקטות ללא לולאה פנימית $(a > b)$: $r = a \pm b \cos \theta$, $r = a \pm b \sin \theta$.
גרף ללא לולאה פנימית שאינו מכיל את הראשית.

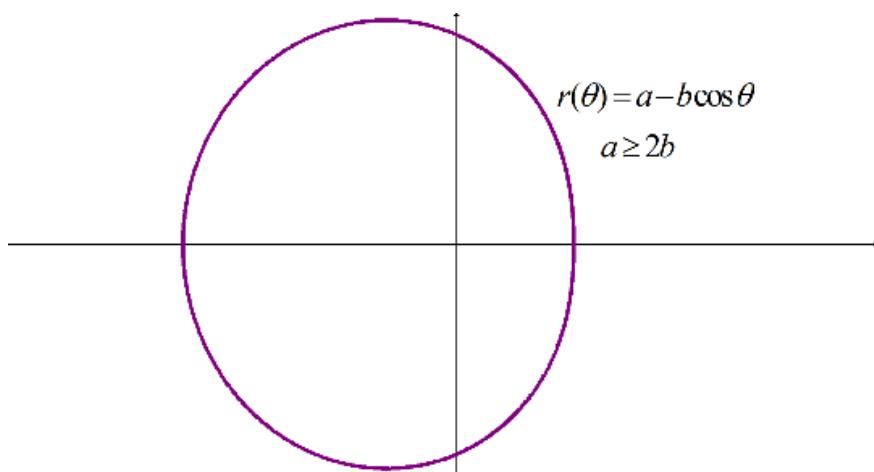
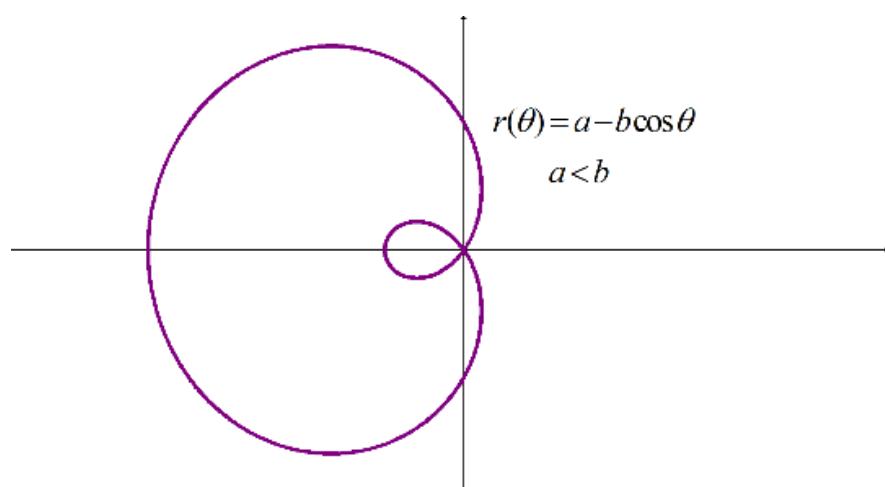
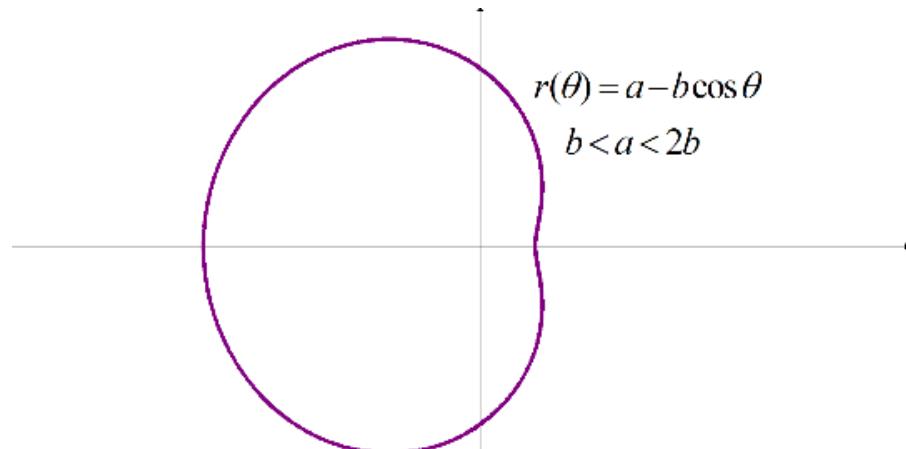
* נדרש בדרך כלל עבור מחזורי שלם $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

למינסקוטות ביתר פירות
הגרף של $r = a + b \cos \theta$


הגרף של

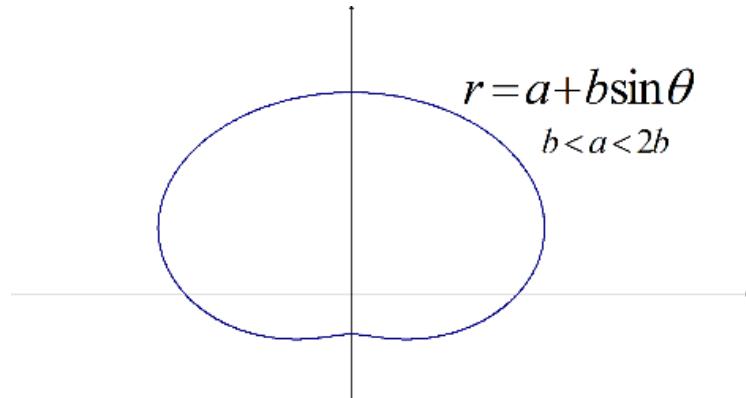
$$r(\theta) = a - b \cos \theta$$

$$b < a < 2b$$

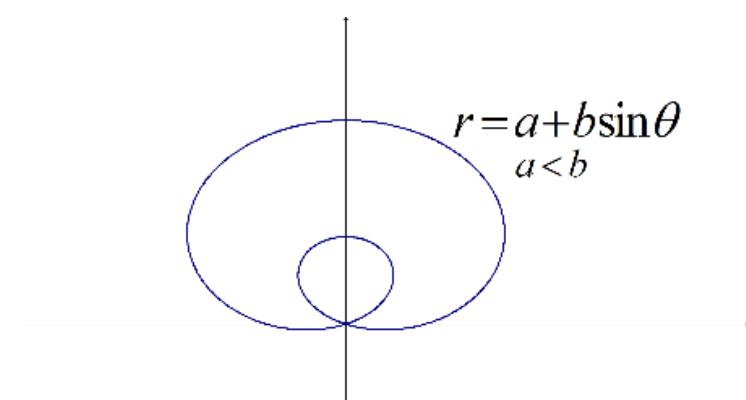


הגרף של

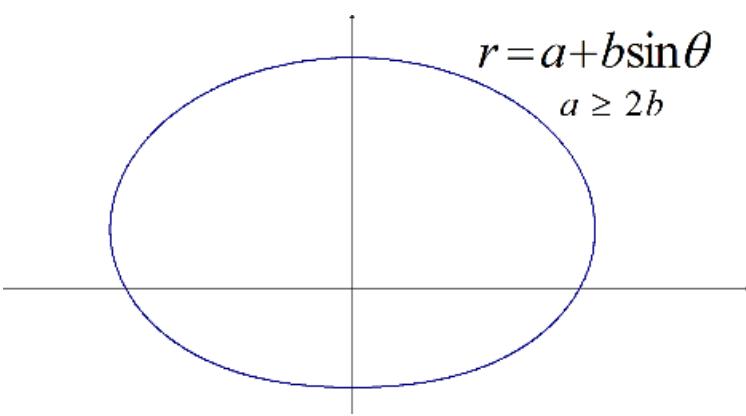
$$r = a + b \sin \theta$$
$$b < a < 2b$$



$$r = a + b \sin \theta$$
$$a < b$$



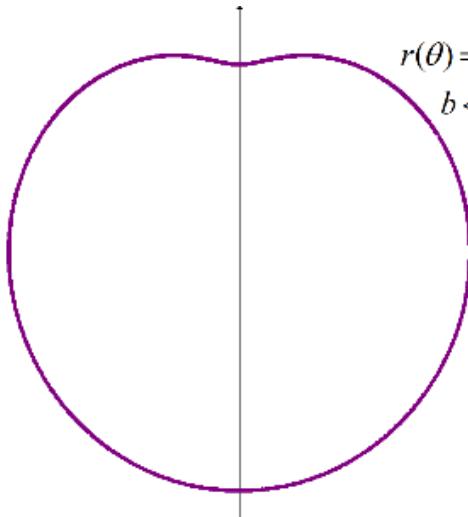
$$r = a + b \sin \theta$$
$$a \geq 2b$$



הגרף של

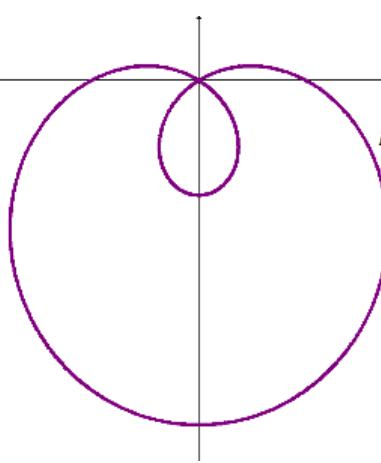
$$r(\theta) = a - b \sin \theta$$

$$b < a < 2b$$



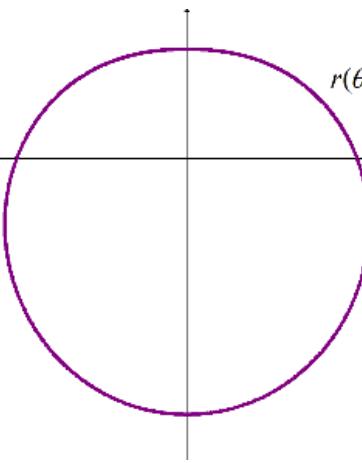
$$r(\theta) = a - b \sin \theta$$

$$a < b$$



$$r(\theta) = a - b \sin \theta$$

$$a \geq 2b$$



גרפים נפוצים נוספים

